EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar



september 09
nr 1
jaargang 85

Centrale examens 2009

Examenbesprekingen

Het examenforum

Pythagoras wordt vijftig!

Jaarvergadering/ Studiedag 2009: Wiskunde, daar kun je op rekenen!

Het einde van een tijdperk



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

september
09
nr 1
jaargang 85

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394



Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Klaske Blom, Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 65,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 37,50
- studentleden: € 32,50
- gepensioneerden: € 37,50
- leden van de VVWL of het KWG: € 37,50

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVVW): € 60,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv:
t.a.v. Annemieke Boere
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: a.boere@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Klaske Blom]

Nieuw schooljaar, nieuwe redactievoorzitter

Daar bent u weer, beste lezer. Goed u terug te weten na een lange vakantie. Allereerst wil ik u voorstellen aan onze nieuwe redactievoorzitter: Heiner Wind! Heiner is sinds 2008 met fpu. Daarvoor was hij als wiskundedocent werkzaam aan het Wessel Gansfortcollege in Groningen en een regelmatige bezoeker van studiedagen, deelnemer aan studiereizen en wat dies meer zij. Zijn betrokkenheid bij het wiskundeonderwijs is groot en wij zijn erg verheugd dat hij een deel van zijn pensioengerechtigde vrijheden weer wil inleveren ten gunste van *Euclides*!

Examennummer

Er schijnen collega's te zijn die speciaal het examennummer van *Euclides* mee naar school nemen omdat hun collega's – geen lid van de Vereniging – met name in dit nummer geïnteresseerd zijn. Ik vermoed dat vele lezers als eerste nagaan hoe de landelijke resultaten waren en dit vergelijken met hun *eigen* resultaten en hiervoor dus terecht komen bij het artikel 'Wiskunde-examens 2009, 1e tijdvak', geschreven door de Cito-medewerkers. Het is weer een interessant stuk geworden waarin de resultaten van de diverse examens geanalyseerd worden, zowel kwantitatief als kwalitatief, en waarin ook hier en daar een tipje van de constructiesluier wordt opgelicht. Ik raad het u bijzonder aan. Het vmbo-BB examen wordt in dit artikel nog niet besproken omdat sommige digitale varianten van dit examen nog 'in gebruik' waren, en dus geheim moesten blijven. In ons volgend nummer informeren we u hierover.
De afgelopen examens betekenden het einde van het tijdperk van de wiskunde 'deel- en heelvakken' op het vwo. Rob van Oord herdenkt met weemoed de lessen kansrekening en statistiek aan B1- en B12-leerlingen. Gerard Koolstra blikt terug op het examen vwo A12, het laatste in een reeks die in 2001 begon. Hij signaleert aan het slot van zijn artikel een aantal problemen die zichtbaar worden in de examens. Het lijkt me stof voor examenmakers en voor u: herkennen we de gesignaleerde problemen en zo ja, hoe gaan we daar dan mee om in de toekomst?
Het éérste in een reeks was het havo A-examen nieuwe stijl. Rob van Oord – wederom – verhaalt over zijn bevindingen. Niet alleen Rob wilde graag iets kwijt. Op het examenforum op de site van de NVvW kwamen zo'n 500 reacties binnen op dit havo A-examen. Er is veel gebruik gemaakt van de mogelijkheid om met elkaar van gedachten te wisselen over de examens. Erik Korthof en Dick Klingens beschrijven de opvallende zaken van de diverse examenfora. En als hekkensluiter vindt u uiteraard ook een verslag van de regionale examenbesprekingen. Ja, ze waren er nog; er was nog steeds voldoende reden en animo om deze – door de NVvW georganiseerde besprekingen – bij te wonen, aldus Frank van den Heuvel. In een ernstig hilarisch artikel passeren alle examens nog een keer de revue.
U weet dat het eerste nummer van een nieuwe jaargang traditiegetrouw ons examennummer is. Meestal zijn we in staat om ook nog artikelen rond andere thema's te plaatsen, maar deze keer niet. Gelukkig kunnen we u informeren over nieuw verschenen boeken en uiteraard vindt u onze vaste columnisten: Frits Göbel laat u zweten op zeldzame permutaties en met Ton Lecluse gaan we terug naar 1932. Maar verder hebben de examenartikelen het hele blad in beslag genomen, één uitzondering daargelaten: Willem van Ravenstein schreef een artikel over de 50ste verjaardag van *Pythagoras*! Huh, hij was toch ouder…? Collega-redacteuren van dit jongerenblad feliciteren we hartelijk met hun jubileum. En, vergeet u niet op de pagina's Verenigingsnieuws het programma voor de studiedag in november te lezen. Met als titel 'Wiskunde, daar kun je op rekenen!' heeft deze dag veel moois in de aanbieding. U komt toch ook? Mijn wens voor nu is dat alle examenanalyses uit dit nummer een startpunt vormen om met elkaar in gesprek te gaan over en op zoek te gaan naar mogelijke verbeteringen van en in ons wiskundeonderwijs. Ik hoop dat we het komend schooljaar weer op elkaar kunnen rekenen!

Net voor het ter perse gaan van dit nummer bereikte ons het droevige bericht dat op 20 augustus 2009 is overleden ons erelid en oud-bestuurslid

Felix Gaillard

Felix was enkele dagen eerder 80 jaar geworden.
Wij wensen zijn vrouw Joke en de kinderen sterkte bij de verwerking van dit verlies.
De Vereniging gedenkt Felix in dankbaarheid voor alles wat hij als bestuurslid en als betrokken lid voor de NVvW en voor het wiskundeonderwijs heeft betekend.

Namens het NVvW-bestuur, Kees Lagerwaard

Inhoud

Aan dit nummer werkte verder mee: Arnout Jaspers.

Wiskunde-examens 2009, 1e tijdvak

[Melanie Steentjes, Paul van der Molen, Ger Limpens, Jos Remijn, Ruud Stolwijk, Gerard Stroomer]

Woord vooraf
[Ger Limpens]
Ook dit jaar maken we als examenmakers weer dankbaar gebruik van de mogelijkheid die de redactie van *Euclides* ons biedt nadere informatie te verschaffen rond de verschillende examens wiskunde (eerste tijdvak 2009)[1]. We baseren ons bij de gegevens die in dit artikel bijeengebracht zijn, op het materiaal zoals dat door Cito direct na afloop van de examens via de versnelde correctie en WOLF verzameld en geanalyseerd is. Dat is ook het cijfermateriaal dat gebruikt wordt om te komen tot de vaststelling van de verschillende N-termen. Verder maken we als toetsdeskundigen gebruik van de informatie uit de regio-vergaderingen die door de NVvW georganiseerd worden. Ook de verschillende discussies die via het examenforum van de Vereniging openbaar gevoerd worden, zijn voor ons uiterst leerzaam. Niet alleen om te zien hoe de huidige examens 'geland' zijn; al die gegevens leveren ons ook nieuwe invalshoeken om toekomstige examens zo optimaal mogelijk te kunnen construeren. Wel merken we op dat niet iedere discussie die daar gevoerd wordt, in onze beleving recht doet aan de examens: na diverse jaren het digitale discours aldaar gevolgd te hebben is langzamerhand te constateren dat sommige gesprekken niet uitblinken door al te veel nuance. Neemt niet weg dat het medium internet als zodanig niet meer is weg te denken.

Al deze informatie kan alleen maar door de bijdragen van velen verzameld worden. Een woord van dank is dan ook op zijn plaats. Denk daarbij aan alle docenten die het materiaal van de versnelde correctie verstrekken, de Vereniging en *Euclides*, de voorzitters en bezoekers van de regiovergaderingen, de webmaster, forum-coördinatoren en discussiedeelnemers op het forum, maar ook, aan de andere kant van het examenconstructieproces, de constructiegroepsleden, leden van de verschillende CEVO-vaksecties, screeners en collegadocenten betrokken bij het uittesten van sommige examenopgaven. Om nog maar te zwijgen van het hele niet-vakinhoudelijke bedrijfsapparaat dat bij Cito en elders bij het fysiek vervaardigen en logistiek afhandelen van de examens noodzakelijk is.

Verderop in dit verzamelartikel treft u aan per wiskundeniveau een inhoudelijke bespreking plus diverse kerngetallen per examen of per vraag (waaronder de p'-waarde, zijnde de in de versnelde correctie feitelijk waargenomen score als percentage van de maximumscore van een vraag dan wel een context of examen). ***Zie pagina 15 e.v.*** voor de bijbehorende tabellen.
Een en ander wordt voorafgegaan ***door tabel 1*** [Leerlingenaantallen 2009] met daarin de verschillende opgegeven deelnemersaantallen bij de examens 2009. Zoals gebruikelijk wijzen we erop dat in deze aantallen altijd een zekere onnauwkeurigheid zit: het werkelijke aantal kandidaten is altijd enkele procenten lager dan het opgegeven (en in de tabel vermelde) aantal, een gevolg van het feit dat scholen steeds een zekere veiligheidsmarge in hun bestellingen inbouwen. Naar aanleiding van deze tabel kan geconstateerd worden, zeker als die gegevens vergeleken zouden worden met die van 2008, dat de digitalisering op vmbo-niveau toch langzamerhand een grote vlucht genomen heeft. Het aantal kandidaten op BB-niveau dat in 2009 een papieren examen gemaakt heeft, is nog maar een fractie van de omvang van de digitaal getoetste groep BB-leerlingen, circa 10% namelijk. Ook in 2010 is er voor de BB-kandidaten nog een papieren mogelijkheid, maar het is duidelijk dat de digitalisering aldaar onontkoombaar is. En de volgende stap zit er ook al aan te komen. Op dit moment worden ook bij niveau vmbo-KB digitale pilot-examens wiskunde geconstrueerd die in 2010 het licht zullen zien. Bedoeling is ook daar binnen enkele jaren te komen tot een verdere invoering van computerexamens. Duidelijk mag zijn dat hier nu eens niet het theezakjesmodel (de inhoud van een hoger onderwijstype in afgezwakte vorm terugvinden in een lager onderwijstype) gehanteerd wordt.
De volgende tabel, ***tabel 2*** [Verzamelde N-termen wiskunde], bevat een overzicht van de diverse bij het eerste tijdvak vastgestelde N-termen, percentages onvoldoenden en bijbehorende gemiddeldes. Ook hier is de consequentie van de hierboven aangestipte digitalisering te constateren: bij vmbo-BB worden verschillende digitale varianten gehanteerd plus een papieren examen. Om te komen tot een evenwichtige normering kan het nodig zijn voor die verschilende varianten onderling verschillende N-termen te hanteren. Op het moment van schrijven van dit artikel zijn sommige van deze digitale varianten nog 'in gebruik' en daarmee geheim. Dat gegeven leidt ertoe dat in dit artikel geen inhoudelijke informatie over de examens van dit niveau (te weten BB) kan worden gegeven. In een later nummer van *Euclides* hopen we door de redactie van *Euclides* in de gelegenheid gesteld te worden alsnog inhoudelijk op deze examens in te gaan, op een manier die vergelijkbaar is met de wijze waarop we dat in het najaar van 2008 hebben kunnen doen.

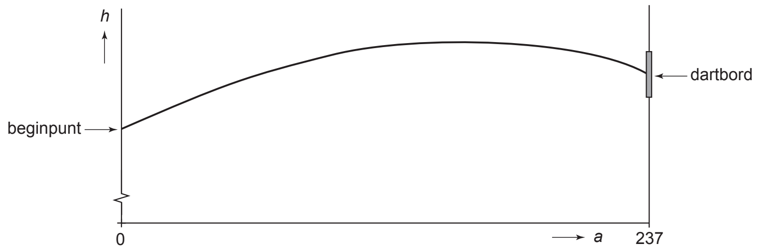
VMBO KB / GLTL
[Melanie Steentjes]
Helaas waren er dit jaar (in tegenstelling tot voorgaande jaren) geen regionale bijeenkomsten, maar alleen een centrale examenbespreking van de vmbo-examens kaderberoeps (KB) en gemengde leerweg/theoretische leerweg (GL/TL) vanwege een tekort aan gespreksleiders voor de regionale examenbesprekingen. Dit vinden we erg jammer omdat we uit de verslagen en de enquêtes van de regionale examenbesprekingen altijd veel waardevolle informatie halen aan de hand waarvan we proberen de examens beter te maken.
Een oproep dus aan enthousiaste vmbo-docenten: meld u aan bij de NVvW als regionaal gespreksleider. Dan zijn er hopelijk volgend jaar wel weer regionale besprekingen.

In het vervolg van dit stuk bekijken we beide examens nader en wijden een apart stuk aan de overlap tussen beide.

VMBO GL/TL

Het GL/TL-examen wiskunde werd door leerlingen enthousiast ontvangen. Zij vonden het examen goed te doen en er kwamen weinig klachten binnen bij het LAKS. Docenten op het forum en bij de centrale examenbespreking waren minder enthousiast. Het merendeel vond het niveau van het examen te laag. Na twee jaren waarin het examen behoorlijk lastig werd gevonden, vond men dit examen te gemakkelijk. Verder werd de stelling van Pythagoras gemist en had er volgens sommigen wel wat meer goniometrie in gemogen. De contexten vond men goed.
We bekijken het examen wat meer in detail. Het GL/TL-examen wiskunde bevatte 24 vragen waarmee in totaal 75 punten behaald konden worden. ***In tabel 3*** [VMBO GL/TL 2009] is een overzicht van p'-waarden per vraag te vinden. Deze p'-waarden zijn gebaseerd op een steekproef van 3848 leerlingen. De laagste score die binnen deze steekproef werd gehaald, was 4 punten en er waren 3 leerlingen die de maximale score wisten te halen.
Het examen startte met de context *Trakteren.* Met een gemiddelde p'-waarde van 65,4 was dit de best gemaakte context van het examen en dus een prettige binnenkomer voor leerlingen. Het is het streven van de examenmakers om het examen met een eenvoudige context te laten beginnen en het is prettig te constateren dat dat is gelukt. De eerste twee vragen kwamen ook in KB voor en opvallend is het grote verschil in p'-waarden. KB-leerlingen hadden veel meer moeite met deze vragen over de berekening van een hoek en de inhoud van een cilinder. Waarschijnlijk komt dit doordat deze context in het KB-examen niet aan het begin maar juist aan het eind van het examen zat. De laatste vraag van deze context was geen overlap met het KB-examen. Bij het GL/TL-examen moesten leerlingen niet alleen de oppervlakte van de rand bepalen (zoals bij KB), maar dit ook omzetten naar de context en berekenen hoeveel doosjes glitter er nodig waren om de rand te versieren.
Ook de context *Vloedgolf* was goed te doen. De eerste vraag is met een p'-waarde van 96 de makkelijkste vraag van het examen.

Jelle werpt een dartpijl. Hieronder zie je een wiskundig model van de baan van de punt van de dartpijl naar het dartbord. Deze baan is een deel van een parabool.



De formule die bij deze baan hoort, is:

$$h = -0{,}001 \times a^2 + 0{,}3 \times a + 160$$

Hierin is *a* de horizontale afstand vanaf het beginpunt in cm en *h* de hoogte van de punt van de dartpijl in cm.

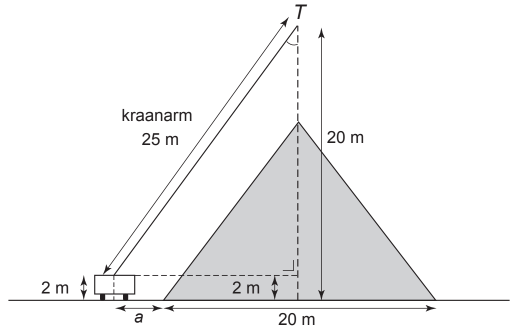
figuur 1 Uit: VMBO GL/TL 2009 (Darten)

De examenmakers krijgen met enige regelmaat de vraag waarom zogenaamde 'laat-zien'-vragen gesteld worden: vragen waarin het antwoord al gegeven wordt. Dat kan twee redenen hebben. Soms is het zo dat het antwoord op de vraag nodig is bij een volgende vraag. Om stapeling te voorkomen, wordt dan een 'laat-zien'-vraag gesteld. Ook stellen we een dergelijke vraag als een leerling vaker met dezelfde formule moet werken. Een leerling moet dan goed weten hoe de formule werkt, anders krijgen we ook daar stapeling. Wellicht herinnert u zich nog de opgave *Groei* uit 2005-1. Daar bleek achteraf dat veel leerlingen de wortelformule verkeerd intoetsten op hun rekenmachine, waarna de hele context verkeerd ging. Zoiets willen we voorkomen, want leerlingen verliezen dan onevenredig veel punten. De eerste vraag van *Vloedgolf* was een 'laat-zien'-vraag van de tweede categorie. Een leerling kon, omdat het antwoord al gegeven werd in de vraag, controleren of hij de formule goed gebruikt had. In vraag 5 moest hij namelijk dezelfde formule nogmaals gebruiken. Deze vraag (gebaseerd op 'inklemmen') ging een stuk minder met een p'-waarde van 53. Bij vraag 6 en 7 moest er gerekend en getekend worden aan de hand van het meegeleverde kaartje van de Grote Oceaan.
De context *Burgerservicenummer* startte zeer eenvoudig met vraag 8 en 9. Beide vragen haalden een p'-waarde van 93.
We hadden verwacht dat leerlingen meer moeite zouden hebben om de gegevens uit de tekst om te zetten in berekeningen, maar dat ging dus heel goed. Bij vraag 10 en 11 werd echt inzicht getoetst en dat bleek moeizamer te verlopen. Over vraag 10 is veel geschreven op het forum en ook tijdens de examenbespreking is deze vraag uitgebreid besproken. Veel leerlingen lieten alleen zien dat 999999999 geen geldig burgerservicenummer is en 999999990 wel. Ze lieten daarmee natuurlijk niet zien dat 999999990 het *grootst mogelijke* geldige burgerservicenummer is. Maar je zou kunnen verdedigen dat ze dat, gezien de formulering van de vraag, ook helemaal niet hoefden te laten zien. Daarom is in de examenbespreking besloten dat deze leerlingen toch de volle vier punten kunnen krijgen.
Gekleurde blokjes was geen overlap met het KB-examen. Met een gemiddelde p'-waarde van 59,5 is deze context niet slecht gemaakt, maar wel de lastigste van het examen. Deze context heeft een mooie opbouw wat p'-waarden betreft. Het begon redelijk eenvoudig met het juiste rechter zijaanzicht tekenen bij een gegeven bovenaanzicht (p'-waarde van 82) en de vragen werden steeds iets lastiger. De laatste vraag, waar in een bovenaanzicht aangegeven moest worden waar een rood blokje zou kunnen staan, scoorde het slechtst met een p'-waarde van 43. Bij deze vraag kwam veel kritiek op het correctievoorschrift. Bij leerlingen die in de eerste kolom R-en hadden geplaatst, hoefden geen punten te worden afgetrokken, terwijl het natuurlijk wel fout is. Het zou beter zijn geweest als in het correctievoorschrift hierover een opmerking was opgenomen.
De context *Darten* begon met een meetkundevraag waarin de oppervlakte van de rand van een cirkelschijf moest worden berekend. In vraag 2 moest de inhoud van een cilinder berekend worden en dus ook

de oppervlakte van een cirkel. Sommige docenten vonden twee keer de oppervlakte van een cirkel berekenen binnen één examen iets te veel van het goede. De examenmakers vonden vraag 2 en vraag 16 echter zeer verschillend en zagen om die reden geen bezwaar beide vragen op te nemen in het examen. De volgende drie vragen gingen over de paraboolvormige baan van een dartpijl. Opvallend is dat vraag 17 (***zie figuur 1***) waarin de hoogte van het beginpunt moest worden berekend, niet echt goed scoorde (p'-waarde van 66 en 29% van de leerlingen scoorde hier geen enkel punt). De formulevaardigheid die hier getoetst wordt, kan niet lastig zijn (invullen van $a = 0$ in de formule). De moeilijkheid leek hier te zitten in het vertalen vanuit de context: het beseffen dat voor het beginpunt geldt dat $a = 0$. Dit blijven leerlingen lastig vinden, maar het is een zeer belangrijke vaardigheid. Ook bij vraag 18 moest de leerling een vertaalslag maken. Deze vraag ging echter veel beter dan vraag 17. Het verschil met de vorige vraag is dat de vertaling naar de context aan het eind van de vraag gebeurde. Een leerling die dat niet kon, verloor maar één punt. Bij vraag 19 moesten leerlingen aan de hand van symmetrie een parabool verder aftekenen en vervolgens aflezen op welke hoogte de punt van de dartpijl op het bord terechtkomt. Deze vraag scoorde het slechtst van het hele examen met een p'-waarde van 20. Leerlingen zijn een dergelijke vraag duidelijk niet gewend. Bij het KB-examen werd de formule erbij gegeven, wat natuurlijk veel meer geoefend wordt, en daar ging het een stuk beter.

En dan de laatste context *Wiskunde en kunst*, waarin gerekend moest worden aan de (wellicht bekende) Pythagorasboom. Dit was de tweede context die specifiek voor het GL/TL-examen was. Deze context heeft een gemiddelde p'-waarde van 63,7 en bleek daarmee een prettige afsluiter. Het lastigst was vraag 21 waar leerlingen met behulp van goniometrie de oppervlakte van een vierkant moesten berekenen. Dit was de enige vraag in het examen waarin goniometrie getoetst werd. Maar liefst 51% van de leerlingen scoorde geen enkel punt. Daarna werd overgestapt op algebra en met een exponentiële formule gerekend. Zoals ook al eerder uit examenresultaten is gebleken: geen enkel probleem voor de meeste leerlingen! Dit zorgde er voor dat leerlingen

Bij het kratten stapelen wordt een kraan gebruikt. De kraanarm heeft een lengte van 25 meter en staat 2 meter boven de grond op een vrachtauto.
De top T van de kraanarm bevindt zich 20 meter boven de grond, recht boven het midden van de piramide. Zie de tekening hieronder. Deze tekening is niet op schaal.



4p **9** De piramide van kratten is 20 m breed. In de tekening is de horizontale afstand a aangegeven tussen het begin van de kraanarm en de rand van de piramide.
→ Bereken hoeveel meter de horizontale afstand a is. Schrijf je berekening op.

figuur 2 Uit: VMBO KB 2009 (Kratten stapelen)

Ook voor vuilniszakken bestaat er een formule om het volume te berekenen. Een volle vuilniszak wordt bovenaan dichtgeknoopt en krijgt daardoor ook een bijzondere vorm. Zie de foto hiernaast.
Het volume V (in liter) wordt berekend met:

$$V = a^3 \cdot \left(\frac{b - x}{3{,}142 \cdot a} - 0{,}159 \right)$$

Hierin zijn a en b de kortste en de langste zijde (in dm) van een platte, rechthoekige vuilniszak en is x de hoogte van de knoopstrook (in dm).

foto



figuur 3 Uit: HAVO A 2009 (Volumes)

met een goed gevoel de examenzaal verlieten. De CEVO besloot de N-term voor dit examen vast te stellen op 0,6. Dat resulteerde in een examen met 28% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,3.

VMBO KB

Ook dit jaar kwamen er weinig reacties op het KB-examen. De docenten op het forum en de examenbespreking vonden het examen aan de moeilijke kant, maar te doen. Ook vond men het examen een goede dekking hebben over de examenstof. De meetkunde die in de KB-context *Kratten stapelen* aan de orde kwam, had niet misstaan in het GL/TL-examen. Bij het LAKS kwamen weinig klachten van leerlingen binnen.
Ook dit examen bekijken we in detail. Het KB-examen bevatte 25 vragen waarmee in totaal 75 punten gescoord konden worden. ***In tabel 4*** [VMBO KB 2009] is een overzicht van de p'-waarden per vraag te vinden. Deze p'-waarden zijn gebaseerd op een steekproef van 2456 leerlingen. De laagste score die binnen deze steekproef werd gehaald, was 3 punten en er was één leerling die 73 punten wist binnen te halen.
Het examen begon met de context *Kamperen*, die alleen in het KB-examen zat. Met een gemiddelde p'-waarde van 67,8 werd deze context het eenvoudigst bevonden, dus ook hier (net als bij GL/TL) een prettig begin voor de leerlingen. Deze context vertoont een mooie opbouw wat p'-waarden betreft.
Met het gegeven in vraag 1 moest verder gerekend worden in vraag 2 en vraag 3, vandaar dat vraag 1 een 'laat-zien'-vraag was. Met een p'-waarde van 92 was dit een van de eenvoudigste vragen van het examen.
Er kon ook niet veel misgaan. Vraag 2 en 3 waren echte rekenvragen en scoorden goed. Bij vraag 4 moesten kijklijnen getekend worden. Hiermee hadden de leerlingen iets meer moeite.

De volgende context, *Kratten stapelen*, bleek een stuk lastiger voor de leerlingen. Ook dit was een specifieke KB-context, maar met een gemiddelde p'-waarde van 49,4 was deze aan de moeilijke kant. De eerste twee vragen gingen prima. Bij vraag 7 moest met de gegeven formule teruggerekend worden. Dit zorgde voor wat meer problemen: 45% van de leerlingen scoorde hier geen enkel punt. In vraag 8 werd een hoek gevraagd die leerlingen met behulp van de cosinus konden vinden. Leerlingen vinden goniometrie lastig, dat bleek ook dit jaar weer uit de resultaten: slechts 16% wist alle punten te halen. In de laatste vraag van deze context, vraag 9 (***zie figuur 2***), moest met behulp van de stelling van Pythagoras een afstand berekend worden. Deze vraag was met een p'-waarde van 22 één van de lastigste vragen van het examen. Waarschijnlijk zat de moeilijkheid niet alleen in het gebruiken van de stelling van Pythagoras, maar ook in de complexiteit van de gegevens. Leerlingen moesten verschillende gegevens uit de tekening combineren om tot het juiste antwoord te komen. Opvallend is het alles-of-niets-karakter van deze vraag: 70% van de leerlingen scoorde geen enkel punt en 13% van de leerlingen wist alle vier de punten binnen te halen.
Vloedgolf was voor een deel overlap met GL/TL. Vraag 6 bij GL/TL is bij KB gesplitst in twee vragen (vraag 12 en 13) om het minder complex te maken. Dit is goed gelukt: KB-leerlingen wisten bij beide vragen goed te scoren. Zeer opvallend is het kleine verschil in p'-waarden tussen KB- en GL/TL-leerlingen bij de laatste vraag. Bij deze vraag werd de plaats van boei B gevraagd bij twee gegeven koershoeken. Dat KB-leerlingen praktisch ingesteld zijn, blijkt vaker bij dit soort tekenvragen: ze scoren er relatief gezien heel goed op!
De eerste twee vragen van *Burgerservicenummer* gingen, net als bij GL/TL, heel goed. Een klein verschil in p'-waarden tussen KB- en GL/TL-leerlingen, maar dit kwam simpelweg omdat de vraag zo eenvoudig was dat GL/TL-leerlingen deze, gezien het plafond van p'-waarde 100, niet veel beter konden maken dan KB-leerlingen. Bij de vragen 17 en 18 werd meer inzicht gevraagd van de leerlingen en daar ging het minder goed. Vraag 18, die overlapte met GL/TL, was de moeilijkste vraag van het examen met een p'-waarde van 21. Het was een alles-of-niets-vraag: 69% van de leerlingen scoorde geen enkel punt en 12% van de leerlingen lukte het om vier punten voor deze vraag binnen te halen.
De context *Darten* vertoonde dezelfde eigenaardigheid als bij GL/TL: ook KB-leerlingen bleken moeite te hebben met vraag 20 waarin de hoogte van het beginpunt gevraagd werd. Dit kwam neer op het invullen van $a = 0$ in de formule, maar met een p'-waarde van 44 lijkt het erop dat ook hier de moeilijkheid zat in het vertalen vanuit de context. De afsluitende vraag bij deze context was geen overlap met GL/TL. Bij KB werd de formule gegeven en moest het ontbrekende deel van de parabool met behulp van deze formule getekend worden. Deze vraag ging een stuk beter dan bij GL/TL, waar leerlingen de parabool op grond van symmetrie moesten afmaken. Toch viel de p'-waarde van 47 de examenmakers een beetje tegen: de vraag werd vooraf als behoorlijk standaard ingeschat. Wellicht is het ontbreken van de tabel oorzaak van de mindere score. Meestal geven we bij dit soort vragen een tabel erbij.
En dan de laatste context van het examen, *Trakteren*. Geen prettige afsluiter van het examen voor de KB-leerlingen met een gemiddelde p'-waarde van 33,3. Vooral de laatste twee vragen leken een brug te ver. Getracht is de laatste vraag nog iets eenvoudiger te maken dan bij GL/TL door niet naar het aantal doosjes glitter te vragen (wat weer een extra vertaalslag noodzakelijk maakte), maar naar de oppervlakte in cm^2. Veel heeft dit niet geholpen, slechts 12% van de leerlingen haalde alle punten. Zo'n 4% van de leerlingen heeft niets ingevuld bij deze laatste vragen. Dat percentage is echter niet zo hoog dat een tekort aan tijd leerlingen parten lijkt te hebben gespeeld. Eerder lijkt het erop dat de zwakkere leerlingen aan het eind de handdoek in de ring hebben gegooid.
De CEVO besloot de N-term voor dit examen vast te stellen op 1,3. Dat resulteerde in een examen met 34% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,1.

Overlap KB en GL/TL

In totaal waren er 32 punten te halen op de overlap van het KB- en GL/TL-examen. ***Zie tabel 5*** [VMBO overlap GL/TL – KB] voor details. De KB-leerlingen scoorden op de overlap een gemiddelde p'-waarde van 52,5. Zoals te verwachten was, scoorden de GL/TL-leerlingen hoger op het overlapgedeelte, namelijk een p'-waarde van 70,1. Het verschil in p'-waarden die KB- en GL/TL-leerlingen scoorden op de overlap, is vergelijkbaar met voorgaande jaren. Wel was de overlap dit jaar in zijn geheel aan de eenvoudige kant; het had iets pittiger gemogen. KB-leerlingen zouden in dat geval de overlap tot de lastigere vragen hebben moeten rekenen, vergelijkbaar met vorig jaar: voor KB was toen de p'-waarde op de overlap 38,7 (en voor GL/TL was deze 55,6).

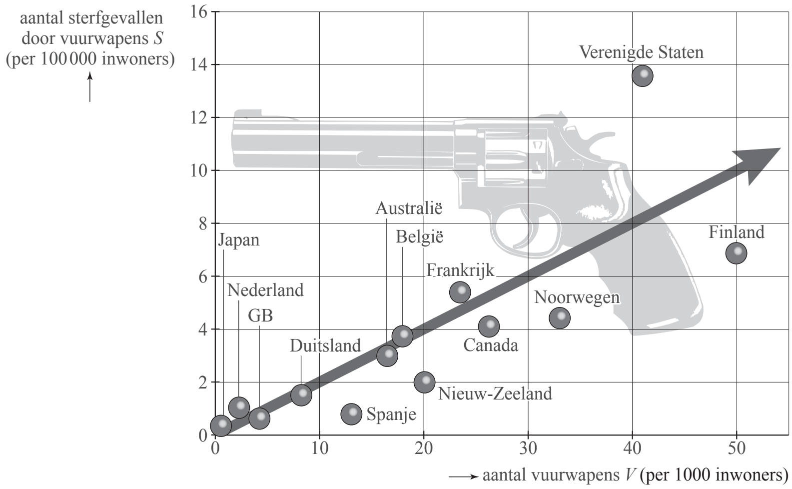
HAVO A
[Jos Remijn]

Dit jaar werd voor het havo het eerste examen wiskunde A volgens het nieuwe 2007-programma afgenomen. Het examen kende 22 vragen, verdeeld over vijf opgaven. ***Zie tabel 6*** [HAVO A 2009] voor de details. De meeste docenten die de regiovergaderingen bezochten, waren positief over het niveau en de omvang van het examen. In het nieuwe programma zijn de onderwerpen beschrijvende statistiek en afgeleide functie verdwenen. Nieuw zijn de binomiale verdeling en de specifieke aandacht voor algebraïsche vaardigheden. Bijna 70% van de docenten was tevreden over de hoeveelheid vragen met algebra in het examen. Bij veel docenten is behoefte aan regels omtrent tussentijds afronden en foutieve notaties (bijvoorbeeld 'breien'). Men heeft het idee dat daar door veel docenten nogal soepel mee wordt omgegaan, maar niet door iedereen op dezelfde wijze.
De leerlingen leken niet ontevreden dit jaar, al werd er weer veel geklaagd. Het klagen ging vooral over vraag 18, waar gevraagd werd een lineaire formule te herleiden tot de vorm $V = p \cdot x + q$; ***zie figuur 3.*** Deze herleiding was voor velen duidelijk een brug te ver, met een p'-waarde van 5 bleek dit de moeilijkste vraag van het examen. Maar liefst 82% van de kandidaten haalde geen enkel punt voor deze vraag. Onder docenten was veel discussie over deze vraag. De exacte betekenis van het woord 'herleid' was bijvoorbeeld niet duidelijk. Toch waren de meeste docenten van mening dat een dergelijke opgave volgens het nieuwe programma 'moet kunnen'. Los van de wellicht terechte kanttekeningen die geplaatst kunnen worden bij het begrip 'herleid' (dat voor wiskundigen toch een

striktere betekenis heeft dan voor de gemiddelde havo-A-leerling), zijn ook de examenmakers van mening dat dergelijke algebraïsche activiteiten van leerlingen binnen het nieuwe programma gevraagd mogen worden.
Het examen had een prettige start met de opgave *Autobanden*. Er moest worden gerekend met allerlei typen banden. Traditioneel lastig was het rekenen met een exponentieel verband. Het examen vervolgde met de opgave *Hebben is schieten?*, die handelde over de relatie tussen vuurwapenbezit en het aantal sterfgevallen door vuurwapens. In vraag 6, ***zie figuur 4***, werd gevraagd naar tegengestelde argumenten bij de discussie over vuurwapenbezit, welke alle uit de figuur dienden te worden gehaald. Een echte wiskunde-A-vraag, die op het docentenforum tot veel discussie leidde. Vraag 8, waar met het evenredig verband moest worden gerekend dat volgde uit de trendlijn, was met een p'-waarde van 34 een van de lastigste vragen in het examen. De opgave *Motivatietest* behandelde het onderwerp normale verdeling. Bij de vragen 12 en 13 kwam de binomiale verdeling aan de orde. Deze vragen werden redelijk goed gemaakt. Bij de opgave *Volumes* kwamen in 2004 gevonden formules aan de orde waarmee de volumes van een kussen en een vuilniszak berekend kunnen worden. Op de vragen waarbij de GR mocht worden ingezet, werd goed gescoord. De opgave besloot met de reeds besproken vraag 18.
In de slotopgave *Datingshow* werd de kansrekening aan de orde gesteld. Daarbij valt op dat bij vraag 20, waar werd gevraagd alle mogelijke manieren op te schrijven waarbij er precies drie stelletjes gevormd worden, door 56% van de kandidaten geen punt werd gehaald.
De CEVO bepaalde de N-term van dit examen op 1,4 wat resulteerde in 27% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,4.
Op grond van de leerlingaantallen blijkt dat dit jaar slechts 11% van de HAVO-kandidaten geen wiskunde-eindexamen doet. Dit is een veel lager percentage dan de 25% van vorig jaar. Niet verrassend, aangezien voor C&M het vak wiskunde A1 is verdwenen.
De C&M-kandidaten scoorden volgens de steekproefgegevens beduidend lager dan de E&M-kandidaten (41,57 ten opzichte van 47,15 scorepunten van de 85). Voor hen

Het vuurwapenbezit en het aantal dodelijke slachtoffers door vuurwapens is in een aantal landen onderzocht. De onderzoeksresultaten zie je in figuur 1.

figuur 1



Figuur 1 geeft het verband weer tussen het jaarlijks aantal sterfgevallen door vuurwapens S (per 100 000 inwoners) en het aantal vuurwapens V (per 1000 inwoners). Behalve de gegevens van een aantal landen is in figuur 1 ook een trendlijn getekend. Voor landen op de trendlijn is er sprake van een evenredig verband tussen S en V.

Zowel voorstanders als tegenstanders van vuurwapenbezit kunnen figuur 1 gebruiken als steun voor hun standpunt.

4p **6** Geef een argument dat voorstanders uit deze figuur kunnen halen en geef een argument dat tegenstanders uit de figuur kunnen halen.

figuur 4 Uit: HAVO A 2009 (Hebben is schieten?)

betekent de N-term van 1,4 een gemiddelde cijfer van 5,8 met 41% onvoldoendes.
De N&G-kandidaten die voor het vak wiskunde A hebben gekozen – zo'n 16% van de kandidaten bij wiskunde A – deden het uitstekend. Bij N=1,4 behaalden zij een gemiddeld cijfer 6,8 met 18% onvoldoendes.

De kandidaten die het bezemexamen wiskunde A12 maakten, ***zie tabel 7*** [HAVO A12 2009], bleken op de overlapvragen met het reguliere examen minder te scoren dan de kandidaten van het reguliere wiskunde A-examen, ***zie tabel 8*** [HAVO overlap A – A12bezem]. Doordat de rest van het bezemexamen wat beter werd gemaakt, leverde bij hen de N-term van 1,4 hetzelfde percentage onvoldoendes (27%) op met hetzelfde gemiddelde cijfer 6,4. Hieruit valt te concluderen dat voor het eerste nieuwe examen wiskunde A een iets strengere norm is vastgesteld dan voor het bezemexamen wiskunde A12.

HAVO B
[Paul van der Molen]

Het examen havo wiskunde B kende dit jaar een p' = 44. Dit is extreem laag. De vraag rijst dan onmiddellijk hoe dit heeft kunnen gebeuren? Voordat we op het examen zelf in gaan, zetten we een aantal zaken op een rijtje die van belang zijn om een goed oordeel over dit examen te kunnen geven.

- In het nieuwe 2007-programma voor havo B ligt een grotere nadruk op de algebra. Dit is een wens van het vervolgonderwijs. Men wil een goede beheersing van de algebraïsche vaardigheden. In het examen 2009 is dit niveau als zodanig neergezet. De leerlingen scoren echter (nog?) niet goed op de algebravragen. Het is kennelijk niet gelukt om in de 2 jaar van de bovenbouw havo het gewenste niveau te halen. Als, over 2 jaar, de leerlingen ook een onderbouwprogramma met verhoogde aandacht voor algebra hebben gevolgd, wordt het wellicht iets beter.
- Zeer recent heeft *Wiskunde E-brief* een onderzoek gedaan naar het aantal contacturen wiskunde op scholen en het oordeel van de docenten daarover. Havo-B sprong er negatief uit: 70% van de docenten zei de hoeveelheid contacttijd te klein of veel te klein te vinden. Dit in tegenstelling tot de andere wiskundevakken waar een betere balans was. Het programma is dus te overladen. De docenten krijgen het

Kort vooraf

[Klaske Blom]

Nieuw schooljaar, nieuwe redactievoorzitter

Daar bent u weer, beste lezer. Goed u terug te weten na een lange vakantie. Allereerst wil ik u voorstellen aan onze nieuwe redactievoorzitter: Heiner Wind! Heiner is sinds 2008 met fpu. Daarvoor was hij als wiskundedocent werkzaam aan het Wessel Gansfortcollege in Groningen en een regelmatige bezoeker van studiedagen, deelnemer aan studiereizen en wat dies meer zij. Zijn betrokkenheid bij het wiskundeonderwijs is groot en wij zijn erg verheugd dat hij een deel van zijn pensioengerechtigde vrijheden weer wil inleveren ten gunste van *Euclides*!

Examennummer

Er schijnen collega's te zijn die speciaal het examennummer van *Euclides* mee naar school nemen omdat hun collega's – geen lid van de Vereniging – met name in dit nummer geïnteresseerd zijn. Ik vermoed dat vele lezers als eerste nagaan hoe de landelijke resultaten waren en dit vergelijken met hun *eigen* resultaten en hiervoor dus terecht komen bij het artikel 'Wiskunde-examens 2009, 1e tijdvak', geschreven door de Cito-medewerkers. Het is weer een interessant stuk geworden waarin de resultaten van de diverse examens geanalyseerd worden, zowel kwantitatief als kwalitatief, en waarin ook hier en daar een tipje van de constructiesluier wordt opgelicht. Ik raad het u bijzonder aan. Het vmbo-BB examen wordt in dit artikel nog niet besproken omdat sommige digitale varianten van dit examen nog 'in gebruik' waren, en dus geheim moesten blijven. In ons volgend nummer informeren we u hierover.
De afgelopen examens betekenden het einde van het tijdperk van de wiskunde 'deel- en heelvakken' op het vwo. Rob van Oord herdenkt met weemoed de lessen kansrekening en statistiek aan B1- en B12-leerlingen. Gerard Koolstra blikt terug op het examen vwo A12, het laatste in een reeks die in 2001 begon. Hij signaleert aan het slot van zijn artikel een aantal problemen die zichtbaar worden in de examens. Het lijkt me stof voor examenmakers en voor u: herkennen we de gesignaleerde problemen en zo ja, hoe gaan we daar dan mee om in de toekomst?
Het éérste in een reeks was het havo A-examen nieuwe stijl. Rob van Oord – wederom – verhaalt over zijn bevindingen. Niet alleen Rob wilde graag iets kwijt. Op het examenforum op de site van de NVvW kwamen zo'n 500 reacties binnen op dit havo A-examen. Er is veel gebruik gemaakt van de mogelijkheid om met elkaar van gedachten te wisselen over de examens. Erik Korthof en Dick Klingens beschrijven de opvallende zaken van de diverse examenfora. En als hekkensluiter vindt u uiteraard ook een verslag van de regionale examenbesprekingen. Ja, ze waren er nog; er was nog steeds voldoende reden en animo om deze – door de NVvW georganiseerde besprekingen – bij te wonen, aldus Frank van den Heuvel. In een ernstig hilarisch artikel passeren alle examens nog een keer de revue.
U weet dat het eerste nummer van een nieuwe jaargang traditiegetrouw ons examennummer is. Meestal zijn we in staat om ook nog artikelen rond andere thema's te plaatsen, maar deze keer niet. Gelukkig kunnen we u informeren over nieuw verschenen boeken en uiteraard vindt u onze vaste columnisten: Frits Göbel laat u zweten op zeldzame permutaties en met Ton Lecluse gaan we terug naar 1932. Maar verder hebben de examenartikelen het hele blad in beslag genomen, één uitzondering daargelaten: Willem van Ravenstein schreef een artikel over de 50ste verjaardag van *Pythagoras*! Huh, hij was toch ouder…? Collega-redacteuren van dit jongerenblad feliciteren we hartelijk met hun jubileum. En, vergeet u niet op de pagina's Verenigingsnieuws het programma voor de studiedag in november te lezen. Met als titel 'Wiskunde, daar kun je op rekenen!' heeft deze dag veel moois in de aanbieding. U komt toch ook? Mijn wens voor nu is dat alle examenanalyses uit dit nummer een startpunt vormen om met elkaar in gesprek te gaan over en op zoek te gaan naar mogelijke verbeteringen van en in ons wiskundeonderwijs. Ik hoop dat we het komend schooljaar weer op elkaar kunnen rekenen!

Net voor het ter perse gaan van dit nummer bereikte ons het droevige bericht dat op 20 augustus 2009 is overleden ons erelid en oud-bestuurslid

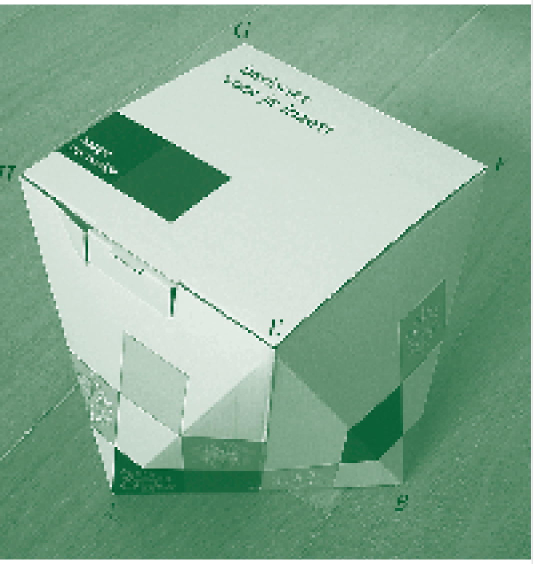
Felix Gaillard

Felix was enkele dagen eerder 80 jaar geworden.
Wij wensen zijn vrouw Joke en de kinderen sterkte bij de verwerking van dit verlies.
De Vereniging gedenkt Felix in dankbaarheid voor alles wat hij als bestuurslid en als betrokken lid voor de NVvW en voor het wiskundeonderwijs heeft betekend.

Namens het NVvW-bestuur, Kees Lagerwaard

Inhoud

Aan dit nummer werkte verder mee: Arnout Jaspers.



figuur 5 Uit: HAVO B 2009 (Bedankt voor je inzet!)

hem gevraagd wordt, dan gaat er niets mis. Een leerling moet immers berekeningen kunnen uitvoeren aan doorsneden.
De basis van de vraag valt buiten het examenprogramma, maar met de geboden hulp viel het er in de ogen van de CEVO-vaksectie en de examenmakers binnen. De kern van de discussie ging dan ook over de vraag of je dit 'productie' moet noemen of 'vragen stellen over zaken die buiten het examenprogramma vallen'. De CEVO koos voor de eerste visie.
In de opgave *Diergemeenschappen* werd de leerling meegenomen naar de beginselen van de exponentiële groei. Veel docenten klaagden over de tekst. De laatste vraag, waar een algebraïsche manipulatie gevraagd werd, scoorde niet best. Juist op dit soort vragen hadden we verwacht dat de nieuwe B-leerling met meer algebrabagage het nu al beter zou doen.

HAVO B1 (bezem)
Omdat dit examen voornamelijk gemaakt is door gezakte kandidaten, werd verwacht dat de score op dit examen laag zou zijn. Tot veler verrassing was dit niet het geval; ***zie tabel 10*** [HAVO B1 2009]. In dit examen zaten verschillende vragen die ook in het reguliere B-examen voorkwamen. Daarmee kunnen de niveaus van de leerlingen in beide populaties vergeleken worden. Er moet natuurlijk wel worden bedacht dat deze overlap slechts opgaven analyse bevatte en geen kansrekening en statistiek. Op deze populatie is zo goed mogelijk normhandhaving toegepast (zie noot [2]). Dit betekent dat de slagingskans van een leerling met een bepaalde vaardigheid bij dit examen gelijk is aan de slagingskans van diezelfde kandidaat bij het referentie-examen. Uitgaande van dit criterium werd de N-term voor het bezemexamen vastgesteld op 1,5 met een gemiddeld cijfer 6,2 en 27% onvoldoende. De hoge N-term leert dat het een relatief moeilijk examen was en het percentage onvoldoende laat zien dat deze bezempopulatie helemaal niet slecht was, zelfs ongeveer gelijk aan het gemiddelde van de totale B1-populaties van de afgelopen vier jaar (hierbij wordt verondersteld – en dat blijkt heel acceptabel, kijkend naar de scoreopbouw door de jaren heen – dat de verdeling van de scores in die jaren ongeveer gelijk was).
Het examen begon met *Vetpercentage*. De B1-populatie scoorde heel vergelijkbaar met de B- en B12-populatie. Alleen de vraag waarin de *abc*-formule moest worden gebruikt, werd duidelijk iets slechter gemaakt.
De opgave *Zonjaar* ging over kansen en de normale verdeling. De tweede vraag was eigenlijk heel simpel, maar veel leerlingen hebben die eenvoud niet ontdekt (***zie figuur 6***). Dit valt af te leiden uit de p'-waarde van 21 voor deze vraag.
De opgave *Wielrenners en training* ging over kwadratische en wortelfuncties. Voor de regelmatige sportschoolbezoeker vormde het slot van deze opgave een bekende context. Met een p'-waarde van 51 was deze opgave goed te maken.
De opgave *Set* was gebaseerd op het spelletje 'Set'. Examenmakers moeten er op letten dat iemand die dit spel goed kent, geen voordeel daarvan heeft bij het beantwoorden van de vragen. Om de relevantie van de derde vraag van deze opgave te begrijpen was de definitie van een set wel vermeld (tussen haakjes). Maar deze informatie was voor het beantwoorden van de vraag niet relevant. Dit bleek de moeilijkste vraag uit het examen. Vervolgens kregen de B1-leerlingen de eerste drie vragen van *Diergemeenschappen* zoals die ook in het B-examen zaten.
Ten slotte volgde nog een opgave *Rad van Fortuin* waarin een aantal kansen op het winnen van een prijs moest worden uitgerekend. Met p' = 42 lijkt de uitspraak gerechtvaardigd dat ook de B1-bezemleerlingen kansrekening lastig vinden.

HAVO B12 (bezem)
Voor de havo B12-populatie geldt een soortgelijk verhaal als voor de B1-populatie. Ook hier was het examen moeilijk en ook deze populatie bleek verrassend sterk: N = 2,0 met gemiddeld cijfer 6,4 en 24% onvoldoende; voor de gegevens per vraag ***zie tabel 11*** [HAVO B12 2009].
De B- en B12-populatie scoorden op de opgaven *Vetpercentage* en *Diergemeenschappen* vrijwel hetzelfde. Op de meetkundeopgave scoorde B12 veel beter. Zoals reeds eerder aangegeven is dit niet verwonderlijk.
De opgave *Wortelfunctie* was in beide examens niet hetzelfde. Hier is goed te zien wat de 'nieuwe stijl' is van het B-examen. In het B-examen moest echt algebraïsch gewerkt worden, terwijl men in het B12-examen zijn toevlucht kon zoeken in de GR. Conceptueel blijft het een lastige opgave. Dit is ook terug te zien in de p'-waarde van 42.
De opgave *Periodieke functie* liet eenzelfde beeld zien als de laatste vraag van *Sinus-cosinusfunctie* in het B-examen: p' = 26. Het vinden van de parameters van een sinusoïde blijkt lastig.
Bij de laatste vragen van dit examen zagen we verrassend hoge percentages 'overgeslagen'. Dit zou kunnen duiden op tijdnood, of op een extreem moeilijke vraag.
De slotopgave was *Voetbal* (***zie figuur 7***). Ook hier zijn twee vrij lage scores waar te nemen. Hoewel het berekenen van de oppervlakte van regelmatige vijf- en zeshoeken ongetwijfeld in de klas is behandeld, scoort de hierover handelende, een-na-laatste vraag van dit examen niet hoog: p' = 39.

VWO A
[Ruud Stolwijk]
VWO A1
Het examen bestond uit 22 vragen, verdeeld over 5 contexten. De gegevens van 2113 kandidaten zijn te vinden ***in tabel 12*** [VWO A1 2009]. Direct na afloop van dit examen werd al duidelijk dat het A1-examen als vrij lastig werd ervaren. Zowel over de lengte van het examen als geheel als over de leesbaarheid van diverse opgaven zijn veel opmerkingen gemaakt. De opmerking 'mooi, maar moeilijk' werd met enige regelmaat gehoord, maar inhoudelijk leek er niet echt veel mis. De uiteindelijke N-term van 1,5 deed recht aan al deze opmerkingen.
In de startopgave, *Emissierechten*, moesten de kandidaten rekenen, met en zonder

In tabel 1 zie je de top tien van de zonnigste jaren in De Bilt.

tabel 1

jaar	zonneschijn (uren)
2003	2022
1959	1986
1947	1882
1949	1829
1995	1814
1976	1814
1921	1781
1929	1773
1911	1741
1999	1720

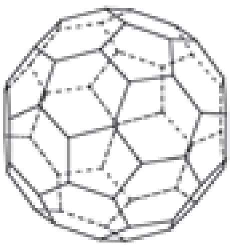
Tabel 1 geldt voor de periode van 1901 tot en met 2003. Met behulp van deze tabel kun je schatten dat de kans dat het aantal uren zonneschijn per jaar minstens 1730 bedraagt, ongeveer 8,7% is.

3p **6** Toon dit aan.

figuur 6 Uit: HAVO B1 2009 (Zonjaar)

Een afgeknotte icosaëder is een ruimtelijke figuur die bestaat uit 12 regelmatige vijfhoeken en 20 regelmatige zeshoeken. Zie figuur 1. Alle ribben van een afgeknotte icosaëder zijn even lang.

figuur 1



Van een regelmatige vijfhoek zijn alle zijden even lang en alle hoeken zijn 108°. Ook van een regelmatige zeshoek zijn alle zijden even lang. Alle hoeken zijn 120°.

De totale oppervlakte van een afgeknotte icosaëder met ribbe 5 is ongeveer 1815.

6p **18** Toon dit aan.

foto

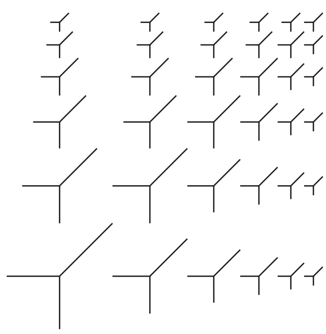


Een bepaald type voetbal wordt gemaakt van 12 regelmatige vijfhoeken en 20 regelmatige zeshoeken met zijden van 5 cm. Als deze voetbal wordt opgepompt, benadert hij de perfecte bolvorm. Zie de foto. Bij het oppompen gaan de platte vlakken enigszins bol staan. We gaan ervan uit dat de oppervlaktes van de bolvormige voetbal en van de afgeknotte icosaëder met ribbe 5 cm, gelijk zijn.

4p **19** Bereken de diameter van de opgepompte voetbal in centimeter nauwkeurig.

figuur 7 Uit: HAVO B12 2009 (Voetbal)

formules. Daarnaast moest er aan de hand van een formule geredeneerd worden. Op zich typisch vaardigheden die bij wiskunde A1 passen, en de kandidaten deden dit dan ook naar behoren. Wel werd het geluid gehoord dat een andere startopgave wellicht een betere keus was geweest, maar aan de gegevens in de tabel is te zien dat deze opgave het toch heel aardig deed.
De tweede opgave, *Nominaal volume*, bleek erg lastig. Het werken met de normale verdeling in vraag 8 en vraag 9 scoorde met p'-waardes van 30 respectievelijk 28 duidelijk beneden verwachting. Een oorzaak daarvoor kan zijn dat de kandidaten de situatie, die toch werkelijk een in Europees verband bestaande is, helaas niet altijd als even duidelijk hebben ervaren. Het is toch te hopen dat een onderwerp als normale verdeling beter door de kandidaten wordt beheerst dan de p'-waarden doen vermoeden.
De opgave *Regelmaat* handelde over een patroon dat door de Duitse kunstenaar Alfons Kunen wordt gebruikt als voorstudie voor kunstwerken; ***zie figuur 8***. Voor veel kandidaten bleek deze opgave, op de openingsvraag (met een p'-waarde van 78) na, helaas een brug te ver. Jammer, want de context leek de examenmakers nu juist goed te passen bij de (profielspecifieke) interesse van de A1-populatie. Dit laatste gold in zekere zin ook voor de vierde opgave, *Fouten*, die gelukkig wel weer wat beter werd gemaakt. In deze opgave werd het probleem aan de orde gesteld dat je door het inzetten van één of twee screeners fouten uit teksten kunt halen.



figuur 8 Uit: VWO A1 2009 (Regelmaat)

Een document bevat 64 fouten. Omdat het een belangrijk document is maakt men gebruik van vier goede screeners, die volkomen onafhankelijk van elkaar de tekst controleren. De kans dat een van deze screeners een fout over het hoofd ziet, is voor iedere screener voor elke fout gelijk aan 0,15.

4p **18** Bereken de kans dat alle 64 fouten worden ontdekt.

figuur 9 Uit: VWO A1 2009 (Fouten)

In de periode 1984 tot en met 2004 is de olieproductie jaarlijks met 0,4 miljard vaten gestegen, van 21 miljard vaten in 1984 tot 29 miljard vaten in 2004. We gaan ervan uit dat de olieproductie in de jaren na 2004 ook met 0,4 miljard vaten per jaar blijft toenemen.
Dan geldt voor de totale hoeveelheid olie $s(t)$ (in miljarden vaten) die we vanaf 2004 tot en met t jaar na 2004 uit de grond halen, het volgende:

$$s(t) = 29 + (29 + 0,4) + (29 + 2\cdot 0,4) + (29 + 3\cdot 0,4) + \ldots + (29 + t\cdot 0,4)$$

4p **12** Toon aan dat dit te schrijven is als $s(t) = 0,2t^2 + 29,2t + 29$.

figuur 10 Uit: VWO A12 2009 (Energiebronnen)

Vraag 18 bleek met een p'-waarde van 12 wel de lastigste vraag uit het examen; ***zie figuur 9***. Na deze moeilijke vraag vormde een door de wiskundige Polya opgestelde formule het onderwerp van het tweede deel van deze opgave. Gelukkig bleken de kandidaten in staat dit deel van de opgave met frisse moed aan te pakken, met keurige p'-waarden van 60 en 61 als gevolg.
De laatste opgave, *Wedden*, ging over het inzetten van geldbedragen op de uitslagen van sportwedstrijden. De eerste vraag, waarbij berekend moest worden op welk resultaat de speler het best kon inzetten, wisten de kandidaten goed te maken. De slotvraag had een zeker puzzelkarakter, maar het was dan ook niet voor niets dat dit de laatste vraag van het examen was.

VWO A12

Net als het A1-examen bevatte ook dit examen 5 contexten, met daarbij in dit geval in totaal 20 vragen. De gegevens van 2271 kandidaten zijn te vinden ***in tabel 13*** [VWO A12 2009]. In de reacties direct na afloop werd meteen al duidelijk dat dit examen over het algemeen in orde werd bevonden, zij het wat aan de lastige kant. Inhoudelijk leek er weinig aan de hand met dit examen. Over de leesbaarheid van diverse opgaven zijn wel diverse opmerkingen gemaakt, maar de rol die de (on)leesbaarheid speelde, leek wat minder groot dan bij het A1-examen. Dat de uiteindelijke N-term 1,3 werd, komt dan ook logisch en terecht over.
De startopgave, *Emissierechten*, begon met enig rekenwerk, en dat ging de kandidaten prima af. Meteen daarna (in vraag 3) kwam differentiëren aan de orde. Een formule in breukvorm, dus de quotiëntregel moest worden ingezet, en de p'-waarde van 39 illustreert dat dit voor veel kandidaten altijd weer een lastige, technische handeling blijkt te zijn. Over het geheel bleek de opgave als startopgave goed te voldoen.
Bij de tweede opgave, *Nominaal volume*, bleek dat de kandidaten moeite hadden met het werken met de normale verdeling. Net als bij de A1-kandidaten scoorden de vragen over dit onderwerp slecht: vraag 7 (identiek aan vraag 8 bij A1) scoorde een p'-waarde van 37 en vraag 8 (identiek aan vraag 9 bij A1) scoorde 33. Voor een mogelijke verklaring van dit tegenvallende resultaat verwijzen we naar wat daarover al bij de bespreking van het A1-examen is opgemerkt.
In de opgave *Energiebronnen* werd hoofdzakelijk de olieproductie behandeld. Bij vraag 12 (***zie figuur 10***) bleek het herschrijven van een somformule bij een rekenkundige rij tot een tweedegraads formule voor de meeste kandidaten te veel van het goede: met een p'-waarde van 11 was dit de slechtst scorende vraag van dit examen. Een conclusie hieruit kan zijn dat
het algebraïsch manipuleren niet de meest ontwikkelde vaardigheid van deze doelgroep is.
De vierde opgave ging, zoals de titel *Euroverspreiding* al aangeeft, over de verspreiding van (Nederlandse) euromunten over binnen- en buitenland. Vraag 16 kon met het gegeven recurrentiemodel worden opgelost, maar dat bleek voor veel kandidaten erg lastig. De p'-waardes illustreren dit. De laatste vraag, een hypothesetoets, scoorde met p' = 53 naar behoren.
De laatste opgave, *Wedden*, ging net als bij het A1-examen over het inzetten van geldbedragen op de uitslagen van sportwedstrijden. Toch was hier geen sprake van overlap: waar bij A1 de speler het uitgangspunt was, waren de vragen in de A12-versie allemaal vanuit de bookmaker geformuleerd. De kandidaten wisten de eerste twee (reken)vragen prima te beantwoorden. De laatste vraag was duidelijk een lastige uitsmijter, waarbij het vinden van een goede oplossings-strategie behoorlijk lastig was. Overigens verscheen er kort na afname een aanvulling op het correctievoorschrift, maar dat heeft iedereen die bij de correctie van dit examen betrokken was, ongetwijfeld gezien.

Overlap VWO A1 en A12

Na afloop van de examens waren er wat geluiden over de vermeend beperkte overlap tussen de examens A1 en A12. Met een overlap van 24 punten (dit is ongeveer 30% van het totale aantal punten) was de overlap echter in lijn met de overlap die de laatste jaren gebruikelijk is. Wellicht dat mensen bij een eerste blik op de examens de opgave *Wedden* als overlapopgave hebben ingeschat, iets dat bij nadere beschouwing toch niet zo blijkt te zijn. De examenmakers waren en zijn van mening dat het voor leerlingen verwarrend zou kunnen zijn als in één opgave zowel vanuit de speler als vanuit de bookmaker vragen waren gesteld. Om die reden is gekozen voor een *speler*-variant en een *bookmaker*-variant, beide wel degelijk gebaseerd op dezelfde 'oeropgave'.
De echte overlap zat in het begin van het examen: twee vragen in de eerste opgave (*Emissierechten*), en de gehele

tweede opgave (*Nominaal volume*).
De opgave *Emissierechten* leende zich volgens de examenmakers goed om voor A12-kandidaten het onderwerp differentiëren aan de orde te stellen, wat voor de A1-ers natuurlijk niet kan. Bovendien bood de formule:

$$W = 0{,}001 \cdot p \cdot (x - 5000) - \frac{540x}{100\,000 - x}$$

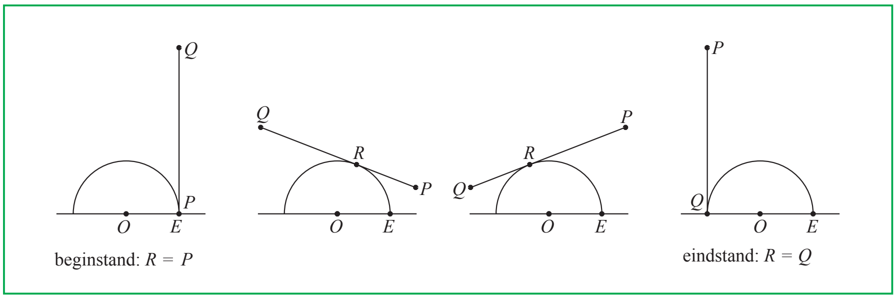
de mogelijkheid om aan de A12-ers net wat algemenere vragen te stellen dan aan de A1-ers. De onderwerpen in de opgave *Nominaal volume* horen in beide programma's thuis, vandaar de keuze om deze opgave in zijn geheel aan beide groepen voor te leggen.
Een overzicht van de prestaties van de kandidaten op de overlap is te zien ***in tabel 14*** [VWO overlap A1 – A12]. Duidelijk komt hieruit naar voren dat de A12-kandidaten beter scoren dan de A1-kandidaten. Voor iedereen die met deze kandidaten te maken heeft, zal dit geen verrassing zijn. Het verschil in prestatie tussen de beide groepen is in lijn met wat de laatste jaren te zien is geweest. Tot slot, dat het verschil in p'-waarde bij de eerste overlapvraag klein is, is niet meer dan logisch: als de A1-leerlingen p' = 95 scoren, is er immers nauwelijks ruimte voor de A12-kandidaten om dit te overtreffen!

VWO B
[Gerard Stroomer]
In het verslag van de normeringsvergadering schreef de voorzitter van de CEVO-vaksectie wiskunde B onder het kopje *Reacties op het examen* over wiskunde B1: 'goed, alleen kritische geluiden ten aanzien van de mate waarin kandidaten scorepunten verliezen als ze verkeerd afronden of eenheden niet vermelden.' In het verslag over wiskunde B12 voegde ze daaraan toe: 'en enige discussie over de noodzaak van sommige verwijzingen bij meetkundebewijzen.'
Over afrondfouten is het correctie-voorschrift duidelijk. Vakspecifieke regel 1 luidt: 'Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt één punt afgetrokken tot het maximum van het aantal punten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.' En algemene regel 6 luidt: 'Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.'
Correctoren die zich niet hieraan houden en hun eigen regels opstellen, veroorzaken een ongelijke beoordeling van de kandidaten en maken het de CEVO moeilijk om, bijvoorbeeld met een aanpassing van de N-term, te compenseren voor het veel voorkomen van afrondfouten.
Mogelijk wordt het vanaf volgend jaar gemakkelijker om het beoordelingsmodel te volgen: met de grotere nadruk op algebra zullen afrondfouten waarschijnlijk minder voorkomen.
Wat betreft het vermelden van eenheden en verwijzingen is algemene regel 3.8 van het correctievoorschrift van toepassing: 'indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen.' Veel docenten vonden dat er in het beoordelingsmodel meer gedeelten van antwoorden tussen haakjes zouden moeten staan, omdat een zekere slordigheid acceptabel zou zijn.
Ook in dit geval geldt echter dat correctoren die onterecht geen punten aftrekken voor het ontbreken van eenheden of verwijzingen, een ongelijke beoordeling van de kandidaten in de hand werken.

VWO B1
Dit examen bestond uit 18 vragen, verdeeld over 7 opgaven. De gegevens van 2295 kandidaten staan ***in tabel 15*** [VWO B1 2009].
De eerste opgave, *Over een parabool gespannen*, bleek een goede startopgave. Het differentiëren en integreren ging de kandidaten goed af.
In de tweede opgave, *Wachten op de bus*, werd de verwachtingswaarde van een wachttijd gevraagd, gevolgd door drie vragen over de normale verdeling.
De goniometrie werd getoetst in de opgave *Een buiteling*. In deze opgave buitelt een lijnstuk met een lengte van π meter over een halve cirkel met een straal van 1 meter en wordt de baan van een eindpunt van dit lijnstuk bekeken. De buiteling is zó dat het raakpunt met snelheid 1 m/s over de halve cirkel beweegt; ***zie figuur 11***. Eerst werd gevraagd naar de stand van het lijnstuk na $\frac{2}{3}\pi$ seconden. In de volgende vraag moest de juistheid van een formule voor de *x*-coördinaat van het eindpunt worden aangetoond. Voor deze vraag behaalde 31% van de kandidaten de maximale score van 3 punten en 59% van de kandidaten kreeg hier geen punten. In de laatste vraag van deze opgave moest worden aangetoond dat de snelheid van dit eindpunt na *t* seconden gelijk is aan *t* m/s. Deze vraag was met een p'-waarde van 30 de moeilijkste vraag van het examen.
In de opgave *Acceleratietijd* was de snelheid van een optrekkende auto als functie van de tijd gegeven:

$$v(t) = 50 \cdot \left(1 - e^{-0{,}07t}\right)$$

met *t* in seconden en *v* in m/s. Gevraagd werden de versnelling op tijdstip *t* = 0 en het aantal seconden waarin de snelheid toeneemt van 0 tot 100 km/uur. Het ligt voor de hand om ook de in die tijd afgelegde afstand te vragen. Vanwege het niveau van de rest van dit examen hebben we deze vraag niet gesteld.
Algebraïsche vaardigheden werden getoetst in de opgave *Dozen*. Van dozen die op een bepaalde manier uit een rechthoekig stuk karton worden gemaakt, werd gevraagd een formule voor de inhoud te verifiëren en daarna te bepalen bij welke hoogte (als functie van de breedte van de strook) deze inhoud maximaal is.
De opgave *Bridge* bestond uit slechts één vraag. Voor deze vraag moest de kans op een 'yarborough' (een hand zonder



figuur 11 Uit: VWO B1 2009 (Een buiteling)

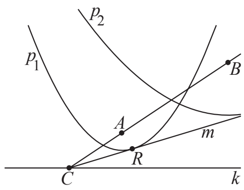
honneurs) berekend worden. Deze vraag bleek de moeilijkste vraag uit het domein Kansrekening.
Het examen sloot af met de opgave *Een vuurpijl met tegenwind*, waarin een baan met behulp van twee functies gegeven werd. Voor het berekenen van de maximale hoogte, de maximale afstand hemelsbreed en de afstand tot de plaats waar de vuurpijl weer op de grond komt, was weer algebra nodig.
De N-term is door de CEVO vastgesteld op 0,9. Dit leverde 34% onvoldoende op en een gemiddeld cijfer van 6,1.

Lijn AB snijdt lijn k in punt C. De lijn m gaat door C en raakt de parabool p_1 in punt R. Zie figuur 2. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

Er geldt: m is de bissectrice van een hoek tussen de lijnen k en AB.

4p 12 Bewijs dit.

figuur 2



figuur 12 Uit: VWO B12 2009 (Twee parabolen met een gemeenschappelijke richtlijn)

VWO B12
Dit examen bestond uit 19 vragen, verdeeld over 7 opgaven. De gegevens van 2151 kandidaten staan ***in tabel 16*** [VWO B12 2009]; ***in tabel 17*** [VWO overlap B1 – B12 2009] worden de gegevens van de overlapvragen vermeld.
De eerste opgave, *Een benadering van een nulpunt*, kwam uit het domein Voortgezette Analyse. Hoewel het niet gebruikelijk is om met een opgave uit dit domein te beginnen, bleek het wel een goede keus. De eerste vraag, waarin een webgrafiek getekend moest worden, werd met een p'-waarde van 96 door bijna alle kandidaten goed beantwoord. Iets meer moeite hadden zij met de volgende twee vragen. Er moest worden aangetoond dat de limiet van een rij gelijk is aan de *x*-coördinaat van een top en verder werd gevraagd een vergelijking te herschrijven tot een andere vergelijking.
De tweede opgave, *Wachten op de bus*, was gelijk aan de gelijknamige opgave uit het B1-examen. Wel is, vanwege de totale hoeveelheid, de laatste vraag van die opgave in het B1-examen uit het B12-examen weggelaten. Zoals gewoonlijk scoorden de B12-kandidaten bij de vragen uit het domein Kansrekening nauwelijks beter dan de B1-kandidaten.
Ook de opgave *Een buiteling* was gedeeltelijk gelijk aan de gelijknamige opgave in het B1-examen. De inleidende vraag is in het B12-werk echter weggelaten. Verder werd bij de eerste vraag van het B12-werk, waarbij een beetje meetkunde nodig is, minder hulp gegeven dan bij de corresponderende vraag in het B1-werk. En tenslotte werd in een extra vraag de lengte van de baan gevraagd. Deze laatste vraag zou ook mooi bij B1 gesteld kunnen worden, maar omdat in de tweede vraag van *Over een parabool gespannen* al een lengte-integraal berekend moest worden hebben we dat bij deze opgave geschrapt.
De opgave *Twee parabolen met een gemeenschappelijke richtlijn* was de eerste opgave over Voortgezette Meetkunde. Zoals de titel al zegt, ging deze opgave over twee parabolen met een gemeenschappelijke richtlijn. Eerst werd gevraagd te bewijzen dat de snijpunten van deze parabolen liggen op de middelloodlijn van de twee brandpunten van de parabolen. Daarna werd gevraagd een naaste-buurverdeling van het vlak te tekenen tussen de beide brandpunten en de richtlijn. Bij de laatste vraag werd weer een bewijs gevraagd (***zie figuur 12***). Aantonen dat lijn *m* ook een raaklijn van p_2 is, leek ons te moeilijk en hebben we daarom achterwege gelaten.
In de opgave *Een gemeenschappelijke raaklijn* werd, met een paar tussenvragen, de richtingscoëfficiënt gevraagd van één van de gemeenschappelijke raaklijnen aan de grafieken van de functies $f(x) = \ln(x)$ en $g(x) = e^x$; ***zie figuur 13***. De laatste vraag van deze opgave was met een p'-waarde van 30 de moeilijkste van dit examen; maar liefst 61% van de kandidaten behaalde geen punt voor deze vraag.
De cirkelmeetkunde kwam aan bod in de opgave *Een koordenvierhoek?* De kandidaten werd gevraagd te bewijzen dat een bepaalde vierhoek een koordenvierhoek is. Zij werden daarbij op weg geholpen met een aan die vraag voorafgaande tussenvraag.
De afsluitende opgave was ook bij dit werk *Een vuurpijl met tegenwind*. Bij de B12-versie is, vanwege de totale hoeveelheid, één van de vragen uit het B1-werk weggelaten.
De N-term is door de CEVO vastgesteld op 0,9. Dit leverde 28% onvoldoende op en een gemiddeld cijfer van 6,5.

VWO A COMPEX
[Paul van der Molen]
Dit jaar werden de laatste compex-examens wiskunde afgenomen. Vorig jaar heeft de CEVO na een brede evaluatie besloten te stoppen met de compex-examens.
Voor een uitgebreid verslag van deze evaluatie verwijzen we naar *Euclides* nr. 3 van december 2008.
De compex-examens zijn goed verlopen. De opgaven van de afgelopen jaren werden als (te) moeilijk ervaren. Daarentegen waren de compex-opgaven dit jaar aan de makkelijke kant. Hierna volgt een kort verslag van beide examens.

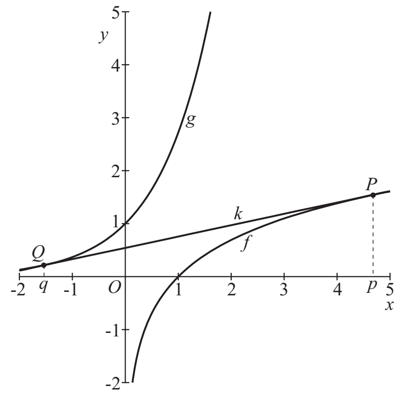
A1 compex
Dit examen bestond uit 11 'reguliere' vragen en 7 compex-vragen; ***zie tabel 18*** [VWO A1-compex 2009]. Op basis van de overlap tussen het reguliere examen en het compex-examen werd in eerste instantie geconcludeerd dat de compex-populatie zwakker zou zijn dan de reguliere populatie. Er werd echter ook geconstateerd dat de opgave *Nominaal volume* de enige opgave was die aan dit argument bijdroeg. Er was geen enkele inhoudelijke reden waarom leerlingen die het compex-programma gevolgd hadden, de opgave *Nominaal volume*, met kansvragen en vragen over de normale verdeling, slechter zouden maken dan reguliere leerlingen. Wel viel op dat de laatste drie vragen van deze opgave veelvuldig waren overgeslagen. Daarmee ontstond de volgende theorie: veel leerlingen hebben 3 uur de tijd gekregen om aan het reguliere en aan het compex-

deel te werken. Zij konden daarbij kiezen in welke volgorde ze wilden werken. Veel leerlingen hebben er voor gekozen om te beginnen met het compex-deel. Vervolgens kwamen deze leerlingen in tijdnood terwijl ze bezig waren met de laatste vragen van het reguliere deel. Dit zou de reden kunnen zijn waarom zoveel leerlingen deze vragen hebben overgeslagen.
Vervolgens is bij de beoordeling van de vaardigheid van de compex-populatie een berekening gemaakt op basis van de overlap zonder de vragen van *Nominaal volume*. Daarmee werd duidelijk dat beide populaties (A1-compex en A1-regulier) ongeveer even vaardig waren; ***zie ook tabel 19*** [VWO overlap A1/A12 regulier – compex]. Dit moet vervolgens tot uiting komen in een vergelijkbaar cijfer. Omdat de normering voor het compex-examen een afgeleide is van de normering van het reguliere examen, is gekozen voor een N-term van 0,9 voor het compex-examen met 31% onvoldoende. Gevolg hiervan is dat beide examens een gemiddeld cijfer 6,2 scoren.
Voor een bespreking van de opgaven *Emissierechten*, *Fouten* en *Nominaal volume* wordt verwezen naar de paragraaf over het reguliere A1-examen eerder in dit artikel.
De opgave *Eekhoorns* was eenvoudig met een gemiddelde p'-waarde van meer dan 80. Kandidaten werd duidelijk hoe je eekhoorns telt in een groot bos en welke aannames je daarbij kunt maken. Ze kregen daarbij te maken met gegevens van tellingen en moesten daarmee bepalen hoeveel eekhoorns er in het bos leefden.
In de opgave *Ziekenhuis* werden de leerlingen geconfronteerd met het probleem van de bedbezetting in een ziekenhuis. Hoe groot moet het aantal bedden op een afdeling zijn om er voor te zorgen dat er aan de ene kant niet te vaak een beddentekort is, maar aan de andere kant er ook niet te veel bedden zijn (want dat kost ruimte en geld)? De leerlingen moesten aan de hand van gegevens van het aantal patiënten dat per dag op een afdeling opgenomen werd en weer ontslagen werd, bepalen hoe het verband er uitziet tussen het aantal bedden en het aantal dagen met een beddentekort.

A12 compex
Dit examen bestond uit 9 'reguliere' vragen (*Nominaal volume*, *Euroverspreiding* en *Emissierechten*) en 8 compex-vragen; ***zie tabel 20*** [VWO A12-compex 2009].
De normering van dit examen verliep eenvoudiger dan bij A1. De A12-compex-populatie bleek een heel klein beetje vaardiger dan de reguliere populatie. Dit valt op te maken uit de p'-waarden op de opgaven in de overlap; ***zie ook tabel 19***. De N-term werd vastgesteld op 0,5 met 23% onvoldoende. Het gemiddeld cijfer van het compex-examen kwam daarmee 0,1 punt hoger uit dan het reguliere examen (6,3 versus 6,2).
De opgaven in het A12-compex-deel hadden betrekking op dezelfde onderwerpen als in het A1-compex-deel. De vragen waren echter soms wel anders.
In de opgave *Eekhoorns* kregen de kandidaten te maken met een eigenzinnige boswachter die zijn eigen telmethodiek, gebaseerd op een logaritmisch verband, ontwikkeld had. De kandidaten moesten bepalen hoeveel dit scheelde ten opzichte van een eveneens gegeven methode gebaseerd op een lineair verband.
In de opgave *Ziekenhuis* kregen de

De functies f en g zijn gegeven door $f(x)=\ln(x)$ en $g(x)=\mathrm{e}^x$. In figuur 1 zijn de grafieken van beide functies getekend. De lijn k is een gemeenschappelijke raaklijn aan de grafieken van f en g. Het punt waarin k de grafiek van f raakt, noemen we $P(p,\ln(p))$, met $p>0$. Het punt waarin k de grafiek van g raakt, noemen we $Q(q,\mathrm{e}^q)$, met $q<0$.

figuur 1



Omdat k raaklijn is in punt P aan de grafiek van f, is $y=\frac{1}{p}x+\ln(p)-1$ een formule voor k.

3p **13** Toon dit aan.

Omdat k raaklijn is in punt Q aan de grafiek van g, is ook $y=\mathrm{e}^q x+\mathrm{e}^q(1-q)$ een formule voor k.

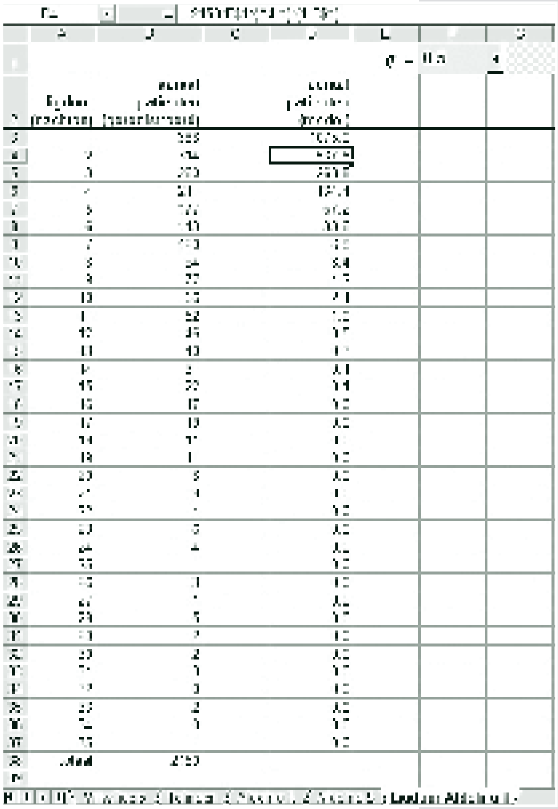
Uit de twee formules voor k kunnen we twee verbanden tussen p en q afleiden: $\mathrm{e}^q=\dfrac{1}{p}$ (oftewel $p=\mathrm{e}^{-q}$) en $\mathrm{e}^q(1-q)=\ln(p)-1$.

Uit deze twee verbanden volgt dat q voldoet aan de vergelijking $\mathrm{e}^q=\dfrac{q+1}{q-1}$.

3p **14** Toon aan dat deze laatste vergelijking volgt uit de twee genoemde verbanden tussen p en q.

4p **15** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de richtingscoëfficiënt van de gemeenschappelijke raaklijn k.

figuur 13 Uit: VWO B12 2009 (Een gemeenschappelijke raaklijn)



figuur 14 Uit: VWO A12-compex (Ziekenhuis)

kandidaten een model aangeboden dat de ligduur van patiënten zou kunnen benaderen. In dit model zat een parameter. Door met een schuifbalk te schuiven kon de waarde van deze parameter worden gevarieerd. De leerling moest op zoek naar de waarde van de parameter die het beste paste bij de gegeven werkelijkheid. De optimale parameterwaarde werd bepaald door te zoeken naar het minimum van de som van de gekwadrateerde verschillen; ***zie figuur 14***.

Over de auteurs

Ger Limpens, Paul van der Molen, Jos Remijn, Melanie Steentjes, Ruud Stolwijk en Gerard Stroomer zijn wiskunde-medewerkers en toetsdeskundigen van Cito te Arnhem (website: *www.cito.nl*).
Hun e-mailadressen zijn achtereenvolgens *ger.limpens@cito.nl*, *paul.vandermolen@cito.nl*, *jos.remijn@cito.nl*, *melanie.steentjes@cito.nl*, *ruud.stolwijk@cito.nl* en *gerard.stroomer@citon.nl* .

Noten

[1] De centrale examens (opgaven, bijlagen, correctievoorschrift) kunnen worden gedownload via de website van Cito (*www.cito.nl*);
vmbo: *www2.cito.nl/vo/ce/vmbo/ex2009/eind_fr.htm*
havo/vwo: *www2.cito.nl/vo/ce/havovwo/ex2009/eind_fr.htm*

[2] Ameling Algra, Ger Limpens (2004): *Examenconstructie, een langdurig en zorgvuldig proces*. In: *Euclides*, jrg. 80(1); pp. 2-5.

Tabel 1 – Leerlingenaantallen 2009

VMBO	
Wiskunde GL/TL	46079
Wiskunde KB	24086
Wiskunde BB	1875
Wiskunde BB digitaal	18635
totaal	90675

HAVO	
Wiskunde A12	1915
Wiskunde A	31766
Wiskunde B1	1073
Wiskunde B12	574
Wiskunde B	12300
totaal	47628

VWO	
Wiskunde A1	5775
Wiskunde A1-compex	76
Wiskunde A12	13901
Wiskunde A12-compex	253
Wiskunde B1	13479
Wiskunde B12	8709
totaal	42193

totaal generaal 180496

Tabel 2 – Verzamelde N-termen wiskunde

1e tijdvak 2009	VMBO			HAVO					VWO					
	BB (*)	KB	GL/TL	A	A12 bezem	B	B1 bezem	B12 bezem	A1	A1 compex	A12	A12 compex	B1	B12
N-term	variërend van 0,9 tot 1,8	1,3	0,6	1,4	1,4	2,0	1,5	2,0	1,5	0,9	1,3	0,5	0,9	0,9
gemiddelde	6,5	6,1	6,3	6,4	6,4	6,0	6,2	6,4	6,2	6,2	6,2	6,3	6,1	6,5
% onvoldoende	24	34	28	27	27	38	27	24	31	31	28	23	34	28

(*) diverse varianten

Tabel 3 – VMBO GL/TL 2009

opgave	Trakteren			Vloedgolf				Burgerservice-nummer				Gekleurde blokjes				Darten				Wiskunde en kunst				
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
max. score	2	4	4	2	3	5	3	2	3	4	4	2	3	3	4	4	2	3	3	4	4	2	2	3
p'-waarde	79	62	62	96	53	67	52	93	93	43	42	82	65	60	43	80	66	81	20	71	40	84	86	58

Tabel 4 – VMBO KB 2009

opgave	Kamperen				Kratten stapelen					Vloedgolf					Burgerservice-nummer				Darten				Trakteren		
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
max. score	2	3	2	4	3	2	3	4	4	2	3	3	3	3	2	3	3	4	4	2	3	3	2	4	4
p'-waarde	92	73	77	47	84	88	44	36	22	92	34	59	77	47	90	88	46	21	53	44	64	47	57	31	24

Tabel 5 – VMBO overlap GL/TL – KB

	opgave	Trakteren		Vloedgolf			Burgerservice-nummer			Darten		
	max. score	2	4	2	3	3	2	3	4	4	2	3
GL/TL	vraagnr.	1	2	4	5	7	8	9	10	16	17	18
	p'-waarde	79	62	96	53	52	93	93	43	80	66	81
KB	vraagnr.	23	24	10	11	14	15	16	18	19	20	21
	p'-waarde	57	31	92	34	47	90	88	21	53	44	64
	verschil in p'-waarden	22	31	4	19	5	3	5	22	27	22	17

Tabel 6 – HAVO A 2009

opgave	Autobanden					Hebben is schieten?			Motivatietest					Volumes					Datingshow			
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
max. score	4	4	3	4	5	4	5	5	3	3	4	3	4	3	3	5	4	4	4	3	4	4
p'-waarde	82	78	77	35	69	58	65	34	63	46	50	73	45	93	56	66	57	5	44	41	50	41

Tabel 7 – HAVO A12 2009

opgave	Autobanden				Schoolexamen-cijfer				Hebben is schieten?		T-shirts			Datingshow				Volumes		
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
max. score	4	4	4	5	4	3	4	4	5	5	5	6	4	4	3	4	3	3	5	4
p'-waarde	80	80	42	66	85	73	38	57	64	27	50	46	21	40	39	48	67	92	57	51

Tabel 8 – HAVO overlap A – A12bezem

	opgave	Autobanden				Hebben is schieten?		Volumes			Datingshow		
	max. score	4	4	4	5	5	5	3	5	4	4	3	4
A	vraagnr.	1	2	4	5	7	8	14	16	17	19	20	21
	p'-waarde	82	78	35	69	65	34	93	66	57	44	41	50
A12 bezem	vraagnr.	1	2	3	4	9	10	18	19	20	14	15	16
	p'-waarde	80	80	42	66	64	27	92	57	51	40	39	48
	verschil in p'-waarden	2	-2	-7	3	1	7	1	9	6	4	2	2

Tabel 9 – HAVO B 2009

opgave	Vetpercentage					Wortel	Sinus-cosinus			Bedankt voor je inzet					Diergemeen-schappen				Combi-functie	
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
max. score	3	6	3	4	5	8	5	5	6	5	3	3	4	6	3	3	4	4	4	3
p'-waarde	88	49	87	63	23	37	29	27	25	74	50	45	39	23	81	42	42	35	58	57

Tabel 10 – HAVO B1 2009

opgave	Vet-percentage				Zonjaar				Wielrenners en training				Set				Diergemeen-schappen			Rad van Fortuin		
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
max. score	3	6	3	4	3	3	4	5	3	6	3	6	2	3	4	3	3	3	4	3	3	4
p'-waarde	83	33	82	53	91	21	73	75	42	45	75	50	96	29	17	50	83	34	42	42	54	33

Tabel 11 – HAVO B12 2009

opgave	Vet-percentage				Bedankt voor je inzet					Wortel	Diergemeen-schappen				Perio-diek	Nat. log.		Voetbal	
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
max. score	3	6	3	4	5	3	3	4	6	8	3	3	4	4	6	5	4	6	4
p'-waarde	87	46	91	52	79	71	73	48	40	42	90	43	43	26	26	30	28	39	33

Tabel 12 – VWO A1 2009

opgave	Emissierechten						Nominaal volume				Regelmaat					Fouten					Wedden	
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
max. score	3	3	4	4	3	3	4	5	4	4	4	4	3	3	4	4	3	4	3	4	4	4
p'-waarde	63	95	75	59	74	51	75	30	28	51	78	35	17	43	34	75	36	12	60	61	66	39

Tabel 13 – VWO A12 2009

opgave	Emissierechten					Nominaal volume				Energiebronnen					Euro-verspreiding			Wedden		
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
max. score	3	4	4	4	4	4	5	4	4	4	5	4	4	4	5	4	6	4	4	4
p'-waarde	97	87	39	33	68	87	37	33	58	85	55	11	80	20	43	24	53	91	81	14

Tabel 14 – VWO overlap A1 – A12

	opgave	Emissierechten		Nominaal volume			
A1	vraagnr.	2	3	7	8	9	10
	max. score	3	4	4	5	4	4
	p'-waarde	95	75	75	30	28	51
A12	vraagnr.	1	2	6	7	8	9
	max. score	3	4	4	5	4	4
	p'-waarde	97	87	87	37	33	58

Tabel 15 – VWO B1 2009

opgave	Over een parabool gespannen			Wachten op de bus				Een buiteling			Accele-ratietijd		Dozen		Bridge	Een vuurpijl met tegenwind		
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
max. score	4	5	4	4	4	4	4	5	3	6	3	4	4	4	6	7	3	6
p'-waarde	83	67	59	81	85	84	42	66	36	30	74	74	72	38	40	54	42	32

Tabel 16 – VWO B12 2009

opgave	Een benadering van een nulpunt			Wachten op de bus			Een buiteling			Twee parabolen met een gemeenschap-pelijke richtlijn			Een gemeenschap-pelijke raaklijn			Een koorden-vierhoek?		Een vuurpijl met tegenwind	
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
max. score	3	5	4	4	4	4	5	6	3	3	3	4	3	3	4	5	4	7	6
p'-waarde	96	68	65	87	85	86	48	50	56	70	72	47	79	62	30	40	56	68	45

Tabel 17 – VWO overlap B1 – B12

	opgave	Wachten op de bus			Een buiteling	Een vuurpijl met tegenwind	
B1	vraagnr.	4	5	6	10	16	18
	max. score	4	4	4	6	7	6
	p'-waarde	81	85	84	30	54	32
B12	vraagnr.	4	5	6	8	18	19
	max. score	4	4	4	6	7	6
	p'-waarde	87	85	86	50	68	45

Tabel 18 – VWO A1-compex 2009

opgave	Emissie-rechten				Fouten			Nominaal volume				Eekhoorns				Ziekenhuis		
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
max. score	3	3	4	4	4	3	4	4	5	4	4	4	3	3	4	4	4	6
p' compex	64	96	78	53	75	33	10	64	17	19	40	85	87	88	68	74	73	58
p' regulier	63	95	75	59	75	36	12	75	30	28	51							
p' A12-compex												94				86	73	

Tabel 19 – VWO overlap A1/A12 regulier – compex

	A1		A12	
	regulier	compex	regulier	compex
gehele examen	p' = 52,0	p' = 58,4	p' = 53,9	p' = 64,5
overlap-deel	p' = 56,9	p' = 50,5	p' = 60,6	p' = 61,9
N-term definitief	1,5	0,9	1,3	0,5
gemiddeld cijfer	6,2	6,2	6,2	6,3
% onvoldoende	31	31	28	23

Tabel 20 – VWO A12-compex 2009

opgave	Nominaal volume			Euro-verspreiding			Emissie-rechten			Eekhoorns			Ziekenhuis				
vraagnr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
max. score	4	5	4	5	4	6	3	4	4	4	5	4	4	4	5	3	5
p' compex	90	34	36	51	32	54	98	92	38	94	83	64	86	73	68	37	77
p' regulier	87	37	33	43	24	53	97	87	39								
p' A1-compex										85			74	73			

Een weddenschap, oud en nieuw en scheepsrecht

VERSLAG VAN DE EXAMENBESPREKINGEN 2009 VAN DE NVvW

[Frank van den Heuvel]

Had u dit jaar een havo-examengroep? Vond u het ook zo spannend? Hebt u met uw collega's gewed hoeveel vragen de termen 'exact' of 'algebraïsch' zouden bevatten? In dat geval is er veel kans dat u een man bent, want volgens één van de examenbesprekingen is wedden (net als voetbal) een erg op jongens gerichte context. En laten die nu allebei voorkomen in het vwo A1-examen waarbij de populatie van kandidaten een overmaat aan vrouwen heeft. De in Den Haag aanwezige jongere vrouwelijke collega's zeggen dat je de leerlingen ook niet echt een plezier doet met emissierechten. Zij vonden de voetbalsom geen enkel probleem.
Had u zowel een havo A- als havo B-groep, was er een probleem. De regionale besprekingen voor deze examens werden namelijk op hetzelfde tijdstip gehouden. Niet iedereen was gelukkig daarmee.
Ik hoop dat uit het bovenstaande blijkt dat er nog steeds voldoende reden en animo is om de door de NVvW georganiseerde regionale examenbesprekingen bij te wonen. De deelnemersaantallen wisselen per jaar, per examen en per regio, maar er is gelukkig een voldoende grote groep collega's die de mogelijkheid aangrijpt om met elkaar de examens te bespreken en hun mening te ventileren over de werken zelf en de correctievoorschriften. De discussies en verslagen leveren Cito en CEVO belangrijke en nuttige informatie voor het bepalen van de N-termen en voor evaluatieve doeleinden.
Ik zal nog even kort de procedure bespreken en vervolgens de verschillende examens met de aangeleverde reacties onder de loep te nemen.

Hoe werkt het?

Het correctievoorschrift bij de examens is bindend. Daarvan mag niet worden afgeweken, wat ieders persoonlijke opvatting ook is. Dat wil niet zeggen dat er geen interpretatieverschillen optreden. Bovendien kan het wenselijk zijn om verfijningen aan te brengen of totaal andere oplossingsstrategieën van een beoordeling te voorzien. Om hierbij van dienst te zijn én om te proberen eenduidigheid bij het nakijken te verkrijgen zijn de examenbesprekingen een nuttig hulpmiddel.
Deze worden op meerdere plekken in den lande georganiseerd. De collega's die als regio-voorzitter optreden (ook u kunt dat worden als u belangstelling hebt, graag zelfs!), komen daartoe eerst centraal bij elkaar.
Op deze centrale bijeenkomst worden de werken doorgesproken en worden afspraken gemaakt over hoe een en ander beoordeeld zou moeten of kunnen worden. Het verslag van deze bespreking wordt op de site van de vereniging gepubliceerd en dient als uitgangsdocument bij de regionale besprekingen. Tevens zijn op de centrale bijeenkomst toehoorders van Cito en CEVO aanwezig. Van de regionale besprekingen worden ook weer (korte) verslagen gemaakt. Tevens worden daar de meningen gepeild middels een aantal standaardvragen. De resultaten van deze enquêtes, de verslagen en de overige reacties worden dan door CEVO gebruikt bij het vaststellen van de uiteindelijke N-termen.

VMBO

Jammer genoeg hebben de regionale besprekingen voor de vmbo-examens dit jaar niet plaatsgevonden. Het examen stond namelijk op de woensdag vóór Hemelvaartsdag gepland. Dus kon de centrale bespreking (die doorging omdat een aantal collega's bereid bleek om op hun vrije dag te komen praten) pas plaatsvinden op vrijdag en zouden de regiobesprekingen niet eerder dan maandag daarna op de rol kunnen komen. De vereniging schatte in dat dit mosterd na de maaltijd zou zijn en heeft daarom besloten om deze dan maar geheel te laten vervallen. Hopelijk éénmalig natuurlijk!

VMBO BB

Hiervan komen de gegevens pas in september vrij, dus dat examen blijft (hier) onbesproken.

VMBO KB

Van dit examen heb ik alleen het verslag van de centrale bespreking gelezen. Dit beperkt zich tot feitelijke reacties en geeft geen meningen van de betrokkenen. Wel heb ik de discussies op het examenforum op de site (*www.nvvw.nl*) geraadpleegd om een idee te krijgen wat er leefde aan vragen en opinies. Aan de hoeveelheid inzendingen valt af te lezen dat er behoefte is om elkaar te bevragen en te raadplegen. Ik beperk me hier tot een aantal zaken die mij persoonlijk zijn opgevallen.
De eerste context van het examen gaat over een stel wat liefst drie maal per jaar op vakantie gaat! Hoezo kredietcrisis? Aan de data te zien zijn het geen leraren in ieder geval. De tweede context gaat over *Kratten stapelen*. Met het oog op de naderende vakantie herkenbaar?
In het correctievoorschrift (CV) vond ik het opvallend dat deze leerlingen (bij vraag 5) blijkbaar gebruik mogen maken van een formule die pas verderop in het examen

Alle Nederlanders hebben een persoonlijk nummer.
Dit nummer heet het burgerservicenummer.
Het burgerservicenummer bestaat uit **negen** cijfers.

Emke heeft bijvoorbeeld burgerservicenummer 0 6 3 7 9 6 3 6 3
Elk burgerservicenummer kan worden voorgesteld door A B C D E F G H Z

Van de eerste **acht** cijfers van het burgerservicenummer wordt de **totaalsom** berekend op de volgende manier:

9×A + 8×B + 7×C + 6×D + 5×E + 4×F + 3×G + 2×H
<-------------- totaalsom --------------->

De totaalsom van Emke's burgerservicenummer 063796363 is dus
9×**0** + 8×**6** + 7×**3** + 6×**7** + 5×**9** + 4×**6** + 3×**3** + 2×**6** = 201

Het **negende** cijfer (Z) is het **controlecijfer**. Met dit cijfer wordt gecontroleerd of het burgerservicenummer geldig is.
Dit gaat als volgt:

totaalsom – controlecijfer = getal dat deelbaar is door 11

Bij het burgerservicenummer van Emke is het controlecijfer 3:
201 – **3** = 198 en 198 is deelbaar door 11 omdat 198 : 11 = 18.
Dus het burgerservicenummer van Emke is geldig.

figuur 1 Uit: VMBO KB en GT 2009

wordt geïntroduceerd. Een techniek die in andere afdelingen altijd ten strengste wordt verboden!
Wel sympathiek is het om de teller in de breukformule van haakjes te voorzien, dat voorkomt weer wat fouten.
Bij vraag 9 geeft het CV wel de oplossingwijze met de stelling van Pythagoras, maar niet de zeker zo voor de hand liggende manier met de sinus.
Bij de vloedgolfsom (waarom wordt nergens het woord *tsunami* gebuikt?) vond ik de formule $s = 3{,}6 \times \sqrt{(9{,}8 \times d)}$ wat gekunsteld. In de praktijk zal deze toch wel vervangen worden door de equivalente formule $s = 11{,}27 \times \sqrt{d}$?
Bij vraag 12 moest ik even goed zoeken waar Honululu nu exact ligt en vond ik het niet echt prettig dat de afstand 7,2 cm is omdat dit net iets meer is dat de helft van de schaalverdeling op mijn geodriehoek en dat is lastig af te lezen (of was dat de bedoeling?).
In de opgave over het *Burgerservicenummer* moest ik de uitleg over het controlecijfer erg goed lezen (***zie figuur 1***). Is dit voor onze leerlingen duidelijk genoeg verwoord?
Bij het *Darten* worden er vragen gesteld over het bereiken van het exacte midden (*bull's eye*). Zeker niet onbelangrijk, maar uiteraard is het gooien van een *triple 20* nog wezenlijker. Is dit nu ook een 'jongenscontext' overigens?
Als laatste worden we getrakteerd op 'zelf gevouwen taartpunten van karton'.
Gelukkig zit er ook nog popcorn in! Om die te vullen zal echter niet meevallen gezien de grilligheid van de uiteengespatte maïskorrels. Ik hoop dat Janet goed uitkomt met haar 4 emmertjes.
Over het niveau van dit examen kan ik niets zeggen omdat deze groep leerlingen mij onbekend is. De contexten en de verscheidenheid en de afwisseling erin vind ik goed gekozen. Dat deze kandidaten 25 vragen in twee klokuren moeten aanpakken, dwingt wat mij betreft bewondering af.
De N-term van 1,3 doet vermoeden dat dit werk aan de pittige kant is geweest.

VMBO GL/TL
Dit examen bevat een aantal dezelfde contexten als het KB-werk met hier en daar een iets andere vraagstelling. Ook hier dus trakteren (nu als beginsom) en de vloedgolf. Ook het burgerservicenummer komt terug maar de inzichtvraag over het niet bestaan van de totaalsom 384 (opgave 11) is van een duidelijk ander kaliber.
De opgave met de gekleurde blokjes is abstracter dan de overige. Mooi puzzelwerk, maar ook opvallend dat de leerlingen bij onderdeel 13 in 3-D moesten tekenen. Hoe nauwkeurig moet dat? Is dat niet erg lastig te beoordelen?
Op het forum was er discussie over vraag 15 en wel of fouten in kolom 1 moeten worden aangerekend.
Ook de hoogte van het eindpunt van Jelle's dartpijl (opgave 19) leverde reacties op. Moet je tekenen (het CV geeft de afleesmarge) of kun je beter gebruik maken van de symmetrie (en dan aflezen wat de hoogte is bij 13 cm)?
Bij de boom van Pythagoras blijkt dat het niet erg is als je het verschil tussen links en rechts niet goed weet (gelukkig maar, ik haal die zelf ook vaak door elkaar), maar ook dat de plaats van de driehoeken niet essentieel wordt gevonden als de vorm maar goed is. Bij de alternatieven voor de oplossingen van opgave 21 miste ik hier de stelling van Pythagoras.
Een laatste vraagje is of u de formule (in de stam van opgave 23 en 24):
$aantal\ vierkanten = \frac{1}{2} \times 2^n$
een echte woordformule vindt? Ik twijfel daar namelijk aan.
Dit examen heeft een N-term gekregen van 0,6. Is dit dus (te) gemakkelijk geweest?

HAVO A
De eerste echte nieuwkomer. Wat gaan de examenmakers de eerste lichting van de nieuwe Tweede fase voorschotelen? Voor de docenten is het ook aftasten geweest. Hoe bereid je de leerlingen het beste voor? Dat de algebrapoot sterker zal worden, ligt voor de hand. Maar voor de rest? Er zijn geen voorbeeldexamens gepresenteerd.
Een gemis wat erg gevoeld is. Dit moet een aanbeveling zijn voor komend jaar als het vwo aan de beurt is?
Elders in dit nummer vindt u een bijdrage van Rob van Oord die zijn visie en ervaringen over dit examen met u deelt.
Ik zal proberen de overige geluiden te verwoorden.
Uit de enquête komt een beeld van tevredenheid naar voren. Van de ruim 70 respondenten was liefst 82% tevreden over het niveau van het examen. 11% vond het niveau te hoog en 7% (dus) te laag.
De inschatting bij het A12-werk was een stuk gedifferentieerder. Hierbij hebben 33 collega's geantwoord en de verdeling lager-gelijk-hoger was 27%-48%-24%. Is dit zo moeilijk in te schatten of blijkt hier een fundamenteler verschil van mening?
68% van de mensen vond het aantal vragen met algebra goed, maar 31% had dit toch liever (nog) hoger gehad. Slechts 58% was tevreden over de startopgave. Ruim ¾ vond de leesbaarheid voldoende, 12% antwoordde hierbij slecht. CV (85% goed) en omvang van het examen (92% goed)

konden er ruimschoots mee door.
Op bijna alle regionale besprekingen heeft men gepraat over meer fundamentele zaken. Zoals daar zijn 'breien', het vermelden van eenheden bij het antwoord en hoe om te gaan met (tussentijds) afronden. De ideeën hierover lopen sterk uiteen (zoals te verwachten was), maar wat wel gemeenschappelijk lijkt te zijn, is de behoefte aan discussie hierover. Men vraagt om sturing en richting gevende adviezen. Het initiatief hiervoor kan zowel bij de CEVO (die in het CV dwingend zaken kan opleggen) als bij de NVvW liggen (bijvoorbeeld door het aanbieden van workshops op de studiedag). Hiermee zal de kou vast niet uit de lucht zijn, maar ik kan het pleidooi voor uitwisseling en discussie alleen maar steunen.
Een ander terugkerend discussiepunt was vraag 6 (de argumentenvraag naar voor- en tegenstanders van wapenbezit). Voor sommigen een type vraag dat nooit in een examen voor zou mogen komen (al was het maar vanwege de lastige correctie), voor anderen juist een voor wiskunde A kenmerkende vraagstelling. Opvallend is wel dat deze argumentenvraag niet in het A12-werk voorkwam. Amersfoort vond *Hebben is schieten* geen onderwerp voor een examen.
Op meerdere plaatsen werd het inconsequente antwoord van vraag 5 (wielen van 17 inch) opgemerkt. De eerdere tekst suggereerde dat deze niet worden geleverd. Ook de *Datingshow* gaf aanleiding tot gemor. Maaike was bang om niet gekozen te worden, maar men laat de kans uitrekenen dat ze wel door minstens één jongen wordt uitverkoren (vraag 19). Ook vraag 22 heeft een vergelijkbare omkering: het is gunstig als in *elke* show stelletjes worden gevormd, maar de vraag gaat over slechts één stelletje bij *in totaal* drie uitzendingen.
Wat vindt u van de volgende serie reacties? Amsterdam: er zat vrij weinig 'echte' algebra in, en wat er gevraagd was, vond men 'overdone'. Zwolle vindt de algebra 'te summier' aan bod gekomen. Amersfoort had 'andere' vaardigheden verwacht (welke?), terwijl Groningen had gerekend op 'nieuwe' vaardigheden (ook dit blijft verder oningevuld).
Tot slot nog enige persoonlijke overwegingen. Ik vraag me af wat het nut is van het berekenen van het volume van een kussen. Is er een verband tussen slaapcomfort en volume?

Diergemeenschappen in Afrika

Er is veel onderzoek gedaan naar de samenstelling van grazende diergemeenschappen in de natuurparken van Afrika. Dergelijke grazende diergemeenschappen worden **gilden** genoemd.
Onderzoek heeft zich onder andere gericht op de gewichten van de diersoorten binnen een gilde. Bij dit onderzoek heeft men de soorten binnen een gilde op volgorde gezet van gemiddeld lichaamsgewicht. De lichtste soort heeft men rangnummer 0 gegeven. De lichtste soort noemen we daarom soort 0, de op een na lichtste soort noemen we soort 1, enzovoort. Je kunt nu de gewichten van elkaar opvolgende soorten vergelijken.
Dit vergelijken gebeurt via de zogeheten **gewichtsratio**. Dat is de verhouding tussen het (gemiddelde) gewicht van volwassen dieren van twee elkaar opvolgende soorten. Als bijvoorbeeld soort 7 een gewicht heeft dat 1,8 keer zo groot is als dat van soort 6, dan is de gewichtsratio tussen deze twee soorten gelijk aan 1,8. Uit dergelijk onderzoek is nu gebleken:

Binnen elk gilde is de gewichtsratio tussen twee elkaar opvolgende diersoorten vrijwel constant.

Dit betekent dat in het gilde van het voorbeeld hierboven geldt: soort 1 is 1,8 keer zo zwaar als soort 0, soort 2 is 1,8 keer zo zwaar als soort 1, enzovoort.

Neem aan dat in een ander gilde de gewichtsratio gelijk is aan 1,35 en dat soort 3 een gewicht heeft van 7,8 kg.

3p **15** Bereken het gewicht van de lichtste soort in dit gilde.

figuur 2 Uit: HAVO B 2009

Verder lijkt mij de waarde van *b* bij de foto van de vuilniszak onjuist. In de tekst wordt *b* namelijk gedefinieerd als de lengte van een *platte* vuilniszak terwijl de pijl op de foto toch echt de hoogte van de *gevulde* zak toont. Het zal geen problemen hebben opgeleverd. Maar toch…
Verder deed het me goed dat er bij het A12-examen een kwalitatieve uitspraak werd gevraagd over de standaardafwijking (vraag 6) en dat er een boxplot moest worden geïnterpreteerd (vraag 7).
De N-term voor dit examen is 1,4 geworden. Ik ben benieuwd hoe de tweede lichting het er volgend jaar vanaf gaat brengen.

HAVO B

Eerst maar even wat cijfers uit de enquête. 37 van de 52 collega's (= 71%) vonden het niveau te hoog, de rest vond het goed. Een nog groter percentage, 81%, wilde meer routinevragen, terwijl 37% het aantal originele vragen te hoog vond. De verdeling tussen vragen met GR (88% in orde) en vragen met algebra (85%) kreeg brede instemming. Ook het CV was in orde (94%). Zo'n 30% van de collega's was niet te spreken over de startopgave, liefst 38 keer werd de leesbaarheid slecht beoordeeld (=73%) en de omvang werd door 58% als te hoog bestempeld.
Niet echt een positief geluid dus. Dat bleek ook uit de verdere reacties, zowel vanuit de centrale bespreking als vanuit de regio's. Opvallend hierbij was echter wel dat men niet zozeer het werk bekritiseerde ('dit is wel het niveau waar we naar toe zouden willen'), maar dat er gewezen wordt op het ontbreken van voorbeeldexamens (zie ook havo A), op het overvolle programma in relatie tot het aantal contacturen en op het grote aandeel meetkunde. Voor de *leerlingen* was dit bepaald geen prettig examen. De goeden redden zich nog wel, de mindere goden en godinnen gaan genadeloos onderuit. De zorg zat bij de middengroep die zeker niet voldoende kans heeft gekregen om zichzelf te bewijzen.
De leerlingen die nu wiskunde B hebben gekozen, vormen in aantal net zo'n grote groep als vorig jaar de B1- en B12-leerlingen samen. Je kunt er dus donder op zeggen dat het niveau van deze club zeker niet vergelijkbaar zal zijn met dat bij het oude B12-werk. Een examen als dit zal dus zijn invloed gaan hebben op het keuzegedrag in de komende jaren (meer A en minder B).
Er is op de centrale bijeenkomst veel gepraat over het aanrekenen van reken- en afrondfouten en het al dan niet vermelden van de eenheden. Hierover is zelfs een brief geschreven naar de CEVO met aanbevelingen hieromtrent. Ook het onderdeel waarin de hoek tussen twee vlakken werd gevraagd, leverde fikse controverses op. Dit onderdeel

staat namelijk niet in de eindtermen en men vond het niet erg kies om dit via de omweg van het getekende hulpvlak alsnog aan de orde te stellen. Volgens anderen waren tekst en tekening duidelijk genoeg en was de opgave daarna niet erg moeilijk meer. Veel leerlingen lezen erg slecht (op zich geen groot nieuws) en hebben deze vraag met behulp van de bijgeleverde (beetje onduidelijke) foto opgelost. Dat ging prompt mis natuurlijk. Meerdere keren is het teveel aan contexten genoemd. Blijkbaar leefden hierover andere verwachtingen. De manier waarop de exponentiële groei werd afgevraagd (in *Diergemeenschappen in Afrika*; ***zie figuur 2***) ontmoette weinig bijval: veel en onduidelijke tekst, het begrip 'omwerken' is niet genoeg omschreven, min of meer dezelfde wiskundige operaties, het CV is te dwingend bij opgave 18, te lastig als laatste opgave van het examen.
De algemene vorm van de sinusoïde, met de vorm met $(x + c)$ in plaats van het in de boeken meer gebruikte $(x - c)$, en het feit dat de leerlingen de exacte waarden uit de mooie-hoekentabel (weer) moeten kennen, waren voor meerdere collega's onaangename verrassingen.
De gelijktijdigheid van de besprekingen voor A en B vindt men onprettig. Of hier een mouw aan te passen is, zal volgend jaar opnieuw bekeken moeten worden. Zwolle tenslotte pleit voor een fundamentele discussie over het gewenste niveau bij wiskunde B.
Over de bezemexamens B1 en B12 heb ik nauwelijks reacties gehoord.
Dat de N-term voor het wiskunde B werk op 2,0 is gesteld zal geen verrassing meer zijn (tenzij men dit nog aan de lage kant vindt).

VWO A1

De totale respons voor het A1 werk bestond uit 33 antwoorden. In Amsterdam was niemand voor dit examen gekomen, in Nijmegen waren er 2 collega's. Het pleidooi van de Amsterdamse voorzitter om de bijeenkomsten maar af te schaffen is echter wel erg kort door de bocht. Zeker gezien zijn eigen opmerking dat het met de 5 aanwezige A12-mensen toch 'gezellig' is geweest. Ook hier wat kengetallen uit de enquête: 69% vond het niveau te hoog, niemand te laag! 23% gaf een slechte spreiding aan, 42% vond het aantal originele opgaven te hoog en 64% het aantal routinevragen te klein. De startopgave gaf 55% een tevreden gevoel. De GR-vragen waren prima (100%) en het CV in orde. Leesbaarheid (64% slecht), omvang (70% te veel) en niveauverschil met A12 (53% te gering) ontmoetten weer veel weerstand. Al met al geen cijfers waar je vrolijk van wordt.
Vanuit de regio's is niet veel teruggegeven. Zo beperkte Nijmegen zich tot opmerkingen over de mannelijke contexten (zie inleiding). Regio Noord is nogal stellig: er is volgens hen nog nooit een fatsoenlijke rijensom geweest. Bij opgave 13 schrijft men eufemistisch 'tamelijk rampzalig'. Amersfoort vraagt om het opnemen van standaardfouten in het CV. Verder vond men daar opgave 18 (Bereken de kans dat alle fouten worden ontdekt) te ver gaan voor wiskunde A en was men liever gestopt na opgave 20. Zij pleiten voor een goed evenwicht tussen het aantal vragen per context en het aantal contexten.
Zwolle vond opgave 11 'niet passend' voor wiskunde A, Rotterdam geeft opgave 12 deze kwalificatie.
Den Haag heeft gemerkt dat de manier waarop de contexten in de methode *Getal & Ruimte* worden gepresenteerd, nogal afwijkt van wat gebruikelijk is bij de examens. En dus beveelt men het oefenen met oude examens van harte aan.
In opgave 17 vond men de formulering 'zowel … als ook' nogal veel van het goede, een opvatting die onderschreven wordt door de Zwolse deelnemers.
Rotterdam was ontevreden over de algebra in het examen en noemde het ervaringsfeit dat veel vragen of erg simpel of juist heel moeilijk waren. Te weinig vragen er tussenin dus.
De N-term voor A1 is uitgekomen op 1,5. Fors aan de hoge kant.
Hebt u overigens de allerlaatste regels van dit examen gelezen? Ze stonden nog *na* de laatste vraag! En zouden onze leerlingen ze gezien hebben? U bent het vergeten? Lees maar mee:
'In de praktijk komt de situatie van Charles [dat hij altijd wint; FvdH] natuurlijk nooit voor. Bookmakers kiezen de quotes namelijk zodanig dat zoiets niet kan gebeuren.'
Geruststellend of juist onheilspellend? Zou het onze leerlingen weerhouden te gokken?
Het Compex-examen A1 blijft hier buiten beschouwing (ook A12 trouwens).

VWO A12

Ook over dit examen en de A12-examens in de loop der jaren kunt u elders in dit nummer lezen. Gerard Koolstra schrijft hierover.
De antwoorden van de 40 aanwezigen op de regiobijeenkomsten laten het volgende beeld zien: 80% vond het niveau goed, 20% beoordeelde het te hoog. Ruime voldoendes voor de spreiding (18% slecht), het aantal originele vragen (62% goed) en de routinevragen (65% goed, maar ook 35% te klein). De GR-vragen scoren ook hier erg hoog (98% tevreden) evenals het CV (95% in orde). Leesbaarheid (58% slecht), startopgave (35% niet tevreden) en omvang (67% te veel) leveren minder tevredenheid op.
Nijmegen heeft het lineair programmeren en de wortel-n wet gemist. Verder hebben zij tijdnood gezien en is hun opgevallen dat in het CV veel dingen tussen haakjes zijn gezet. Zij vragen met nadruk om voorbeeldexamens voor komend jaar. Den Haag sprak tevredenheid uit over het werk van de centrale besprekers. Zij spraken nog wel over de formulering bij onderdeel 8. 'Ondeugdelijk' en 'in minus' waren blijkbaar lastige zaken.
Wist u overigens dat deze context en de bijbehorende tabel bijna identiek voorkomen in de gecertificeerde NLT-module (voor havo) 'Maak het verschil'?
Amersfoort had graag afleesmarges gezien bij opgave 10 en vond dat de stabilisatie bij de euromunten wel erg lang op zich laat wachten ('dat maken wij niet meer mee').
Regio Noord spant de kroon qua heftigheid van reacties: opgave 14 is volgens hen 'traumatisch slecht' gemaakt. Hopelijk kan de vereniging enige nazorg organiseren, het lerarentekort is al nijpend genoeg.
Zwolle merkt op dat vraag 10 van het A12-werk (het onderzoeken van het aandeel aardgas) juist een goede vraag voor het A1-examen was geweest.
Bij vraag 11 daarentegen vinden ze de tekst niet om door te komen. Vraag 20 is een 'teleurstellend einde van het examen'.
Rotterdam reageert heel kort: niet moeilijk, maar je moest wel goed lezen (soms wel drie keer).
De N-term is 1,3 geworden.

VWO B1

Het totaal aantal aanwezigen bij de besprekingen was 68. Men is op 8 plaatsen

samengekomen. Een gemiddelde dus van 8,5. Gezien de spreiding in de aantallen is het echter de vraag of dit wel de juiste centrummaat is. De belangstelling in het westen (inclusief Amersfoort) lijkt groter dan in de andere regio's. Niet veel verschil was er in de antwoorden. Het algemene beeld is als volgt: 87% vindt het niveau goed, 13% vond het te laag. Hoge scores ook op de andere items. Opvallend: maar één iemand was ontevreden met de algebra. Slechts de omvang (17% te hoog) viel wat negatief op. Bijna 80% (23 van de 29) vond het niveauverschil tussen B1 en B12 goed. Prettig om te merken dat men nog tevreden kan zijn.

In het verslag van Amersfoort staat tot vijf keer toe dat men het werk (erg) gemakkelijk vond. Maar dat er ook valkuilen waren, dat de resultaten bij sommigen alsnog tegenvielen, dat het tweede deel een stuk lastiger was en dat men lang bezig is geweest.

Amsterdam en Rotterdam noemden het grote aantal scorepunten in de laatste vier algebraïsche onderdelen. Dat vindt men ongelukkig wegens de vermoeidheid en de mogelijke tijdsdruk. Ook viel men in de hoofdstad over het aantal verschillende contexten (een lang bridge-verhaal met maar één vraag; ***zie figuur 3***). Hierover is ook op de centrale bespreking uitgebreid gesproken, omdat de tekst mogelijk niet volledig helder is over wat een *honneur* is (is het een kaart op zichzelf of geldt het als je een setje van vijf hebt). Rotterdam klaagt over de positie van het wiskunde B-examen op de kalender. Steeds als laatste en in de middag, dat zou men graag anders zien. Ze dragen een rigoureuze oplossing aan voor het eenheden debat: gewoon *alle* eenheden in het CV tussen haakjes plaatsen en klaar is Kees. Mee eens?

De opmerking uit het CV: ‘ (…) of een gelijkwaardige uitdrukking’ is multi-interpretabel. Men wilde hier meer duidelijkheid over.

Zwolle wijst op de gevolgen van een rekenfout in het begin van de onderdelen 16 en 18. Dit pakt desastreus uit en gegeven het totaal van 80 te scoren punten, tikt zoiets hard aan.

De rol van de GR kwam ter sprake bij onderdeel 1. Hier wordt gevraagd om iets ‘aan te tonen’. Mag je dan de GR gebruiken om een raaklijn op te stellen? Zelfs met het nomenclatuurrapport (zonder officiële status) in de hand werd men het niet eens.

Rotterdam heeft het over ‘felle discussies’. Zeker zo fel was hun reactie bij opgave 4. Men noemt het BESPOTTELIJK (inderdaad, met hoofdletters!) om het antwoord 12 minuten niet volledig goed te rekenen vanwege de reële context en het gegeven dat er niet met theoretische kansen wordt gewerkt. Eerlijk gezegd snap ik dat niet. Een verwachtingswaarde van 11,7 of 12 verschilt nogal. En waarom zou je op hele minuten moeten of willen afronden? Misschien moet ik volgend jaar maar eens naar Rotterdam gaan.

De stemming daar is behoorlijk uitgesproken gezien de reacties bij de opgaven 7 (‘zo geformuleerd een waardeloze vraag’) en 15 (‘een draak van een vraagstuk’). Zouden de collega's daar ook last van verzadigings- en vermoeidheidsverschijnselen hebben gehad? Met de N-term van 0,9 kan eenieder wel vrede hebben vermoed ik.

VWO B12

Het traditionele sluitstuk van dit artikel. Voor de overlap met het B1-werk verwijs ik naar hierboven. 51 personen hebben de vragen beantwoord. 94% van hen vond het niveau goed, de overige 6% vond het te laag. Ook hier opvallend positieve scores met als uitzondering weer de omvang die door 27% als te groot wordt opgegeven.

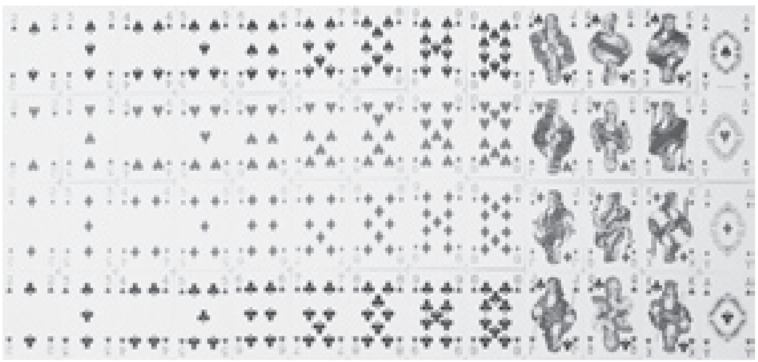
Een opvallend geluid kwam uit Amersfoort. De jongens komen slechter uit de verf (vanwege slordigheid en nonchalance) dan de meisjes (die werken nauwkeuriger).

Amsterdam vond het aantal bewijsvragen te groot in relatie tot de omvang van dit onderwerp. Ze vragen ook meer tijd. Het subtiele verschil in vraagstelling bij opgave 7 (bij B12 moesten ze nog aantonen dat er nog een hoek ter grootte t is; bij B1 was dit al gegeven; ***zie figuur 4***) leidde tot discussies of dit nog wel echt bewezen moest worden.

Bridge

Het kaartspel bridge wordt gespeeld met een pak van 52 kaarten. Er zijn vier ‘kleuren’: klaveren, ruiten, harten en schoppen. Van elke kleur zijn er 13 kaarten: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Boer, Vrouw, Heer, Aas. Zie onderstaande foto. De hoge kaarten 10, Boer, Vrouw, Heer en Aas heten **honneur**. In het begin van het spel krijgt een speler aselect 13 kaarten uit het pak: een zogenaamde **hand**.

foto



Lord Yarborough (1809-1897) bood aan om een speler £1000 te betalen als de speler een hand kreeg zonder honneurs. De speler moest hem dan wel voor elke andere hand (dus met minstens één honneur) £1 betalen. Een hand zonder honneurs wordt daarom wel een **yarborough** genoemd.

15 Zal dit aanbod op den duur winst opgeleverd hebben voor Lord Yarborough? Licht je antwoord toe.

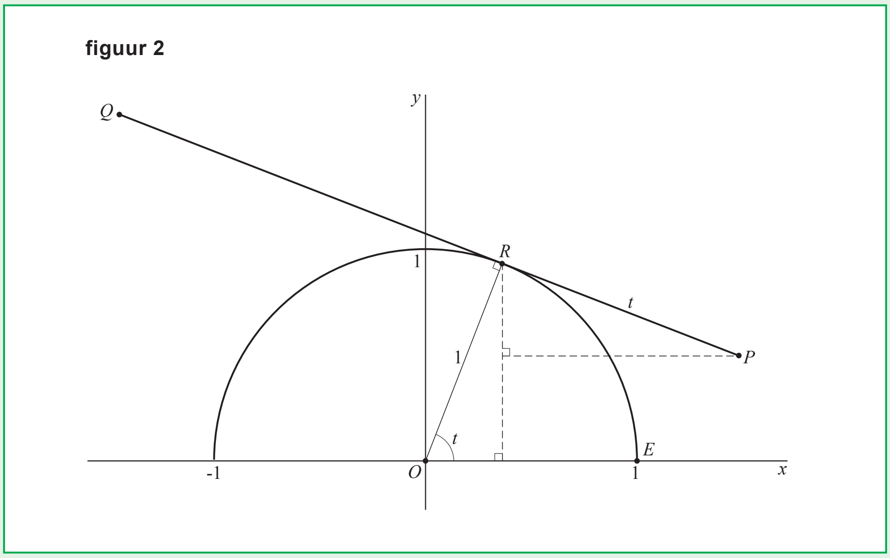
figuur 3 Uit: VWO B1 2009

Bewijsvoering was ook een meer algemene kwestie. Het CV vermeldt de te gebruiken stellingen expliciet; het veld lijkt onderscheid te willen maken tussen voor de hand liggende stellingen ('hoekensom' of 'parabooleigenschap') en *echte* stellingen ('koordenvierhoekstelling').
Een fundamentele discussie waarover het laatste woord nog niet gesproken is. Het kleine hoekje op de uitwerkbijlage bij de conflictlijnen van opgave 11 werd matig gewaardeerd (***zie figuur 5***).
Ik sluit af met een zin uit het verslag van Zwolle: 'Men eindigde hier in een uiterst gezellige stemming met verhalen over pyjamadagen en een demonstratie "integraal nakijken" bij de tweede correctie.' Toch wat gemist geloof ik!
Ook dit examen kreeg een N-term van 0,9 mee.

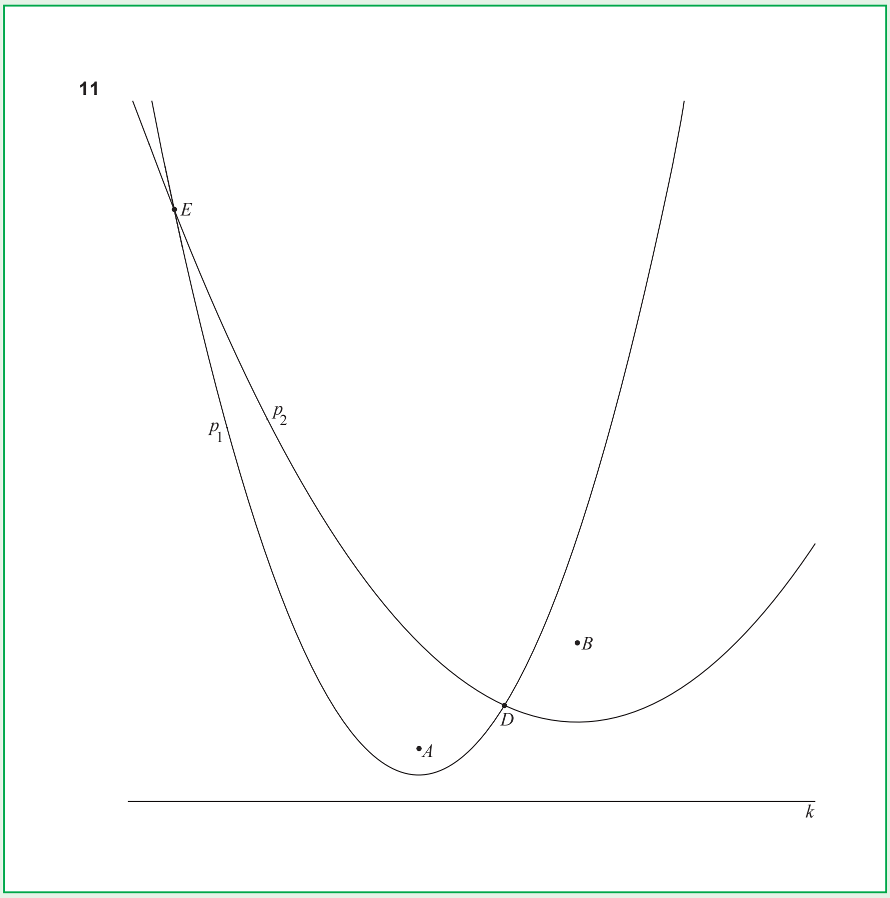
Driemaal

Het aloude scheepsrecht dus. Mijn voornemen was om dit artikel maximaal drie jaar achtereen te schrijven. Mijn termijn zit er dus op.
Wie van u voelt zich geroepen het stokje over te nemen? U kunt zich melden bij de redactie of bij de vereniging.

O ja, het aantal exact, algebraïsche vragen bij havo B was 6. Hopelijk hebt u de weddenschap hiermee gewonnen.



figuur 4 Uit: VWO B12 2009



figuur 5 Uit: VWO B12 2009

Over de auteur

Frank van den Heuvel is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort en daarnaast penningmeester van de NVvW.
Reacties zijn welkom op zijn e-mailadres *f.vd.heuvel@hccnet.nl*

Het Examenforum 2009

[Erik Korthof en Dick Klingens]

Ook dit jaar heeft de mogelijkheid die het examenforum op de site van de NVvW biedt om met elkaar te communiceren over het centraal examen en het bijbehorend correctievoorschrift, gretig aftrek gevonden.

Leden en 'gasten'

Er werden in het Examenforum VO 2009 totaal ruim 200 topics geopend en daar kwamen meer dan 1500 reacties op. Topper was het examenforum vwo A met ruim 50 topics, maar dat is niet zo verwonderlijk, omdat dit forum zowel over A1 als A12 ging. Vmbo GT en havo A haalden zo'n 10 topics minder. De meeste reacties kwamen binnen bij havo A: bijna 500!
Leden van de vereniging die inloggen op de site, kunnen zonder verder poespas hun reactie in het forum plaatsen. Wie niet ingelogd heeft, moet naam en e-mailadres vermelden en nog een veiligheidscontrole passeren en wordt als 'gast' vermeld.
Het blijkt dat het overgrote deel van de bijdragen in het examenforum van 'gasten' afkomstig is; bij het vmbo nog meer dan bij het havo/vwo. Maken de leden van de vereniging geen gebruik van de inlogmogelijkheid of zijn er zo veel collega's die (nog) geen lid zijn van de vereniging? En ondanks het verzoek om je met volledige naam te melden gebruikten veel 'gasten' toch een pseudoniem.

Wie wel en wie niet?

In vrijwel elk examenforum kwam de behoefte naar voren om elkaar te melden hoe de gemiddelde score van de eigen leerlingen was. Bij havo B leek het zelfs meer om elkaar te troosten, want daar vielen de scores laag uit. 40 collega's deelden daar hun 'wanhoop'. Op een gegeven moment bleek dat leerlingen meekeken in het forum en zo te weten kwamen hoe het examen in hun klas gemaakt was. Om dit onbedoelde neveneffect te voorkomen werd bij het doorgeven van gemiddelde scores wel de gelegenheid geboden om onder pseudoniem, en zonder e-mailadres, te reageren, hoewel enkele collega's lieten weten aan een dergelijke geheimhouding geen behoefte te hebben. In dit verband kwam de vraag naar voren of in de toekomst het examenforum, waarin soms ook voor betreffende leerlingen mogelijk herkenbare beschrijvingen van hun oplossingen te lezen zijn, alleen toegankelijk te maken voor leden, en dus *na* inloggen.



figuur 1 Examenforum VO 2009

Vooralsnog is dit niet aan de orde (maar mogelijk toch wel volgend jaar), want, zoals blijkt uit het grote aantal 'gasten' en het topic 'Forum bedankt'[1]: het examenforum voorziet in een zeer duidelijke behoefte van de wiskunde-examinatoren, lid of niet.

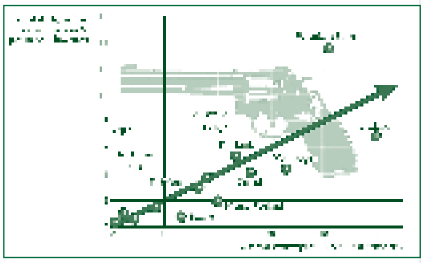
Decimalen en 'breien'

Opvallend was het aantal keren dat de onduidelijkheid over het aantal decimalen in het antwoord aan de orde gesteld werd. Daarbij werd ook vaak het tussentijds afronden en andere onnauwkeurigheden in berekeningen genoemd. Er werd in den lande flink mee geworsteld. Het correctievoorschrift (CV) laat er zich, volgens vele reacties, te summier en onduidelijk over uit. De voorzitter van de NVvW, Marian Kollenveld, schreef er in het Algemeen Forum over[2]:
'De discussie daarover voeren we af en aan nu zo'n jaar of twintig. (…) De NVvW heeft vaak met de CEVO hierover contact gehad. In eerste instantie hebben we toen gevraagd om meer duidelijkheid, dus in elke vraag helder aangeven hoe nauwkeurig het antwoord moest zijn. Die duidelijkheid kwam, maar had als gevolg dat er in een examen soms wel een heel punt verloren kon gaan als een kandidaat alle keren verkeerd afrondde. Dat was ook weer niet de bedoeling. Vervolgens is geprobeerd om iets over significante cijfers in het wiskundeprogramma op te nemen, maar dat is bij Profi, bij Pep en ook bij cTWO niet gelukt. Om begrijpelijke redenen, de programma's zijn al vol en het is niet de eerste prioriteit. En nu zitten we volgens mij in een situatie waar theoretisch zeker wat op aan te merken is – dat gebeurt ook elk jaar – maar die praktisch werkbaar is: soms is duidelijk de nauwkeurigheid aangegeven en dan is het ook fout als de kandidaat die niet volgt, en anders staat het antwoord met een marge in het CV.'
Verder was het 'breien' in diverse examenfora ook dit jaar weer regelmatig punt van discussie: hoeveel punten ga je aftrekken als het in meerdere vragen gebeurt? Daarover verschilden de meningen nogal. Bij het vmbo bestaat de regel: 'Als in een berekening een notatiefout is gemaakt en als gezien kan worden dat de kandidaat juist gerekend heeft, wordt hiervoor geen scorepunt afgetrokken.' En daarmee was de discussie over 'breien' meteen gesloten. Verder varieerde het oordeel in 17 reacties over deze soort verschrijving van tolerant tot verafschuwend: van 'Ik trek er geen punten voor af' tot 'Bij elke vraag 1 punt'.

Havo A

Bij havo A leverde vraag 22: 'Bereken de kans dat in de eerste drie shows van het seizoen in totaal slechts één stelletje wordt gevormd' de meeste discussie op, 38 reacties. Werd er nu bedoeld dat er per show één stelletje werd gevormd of dat er in slechts één van de drie shows één stelletje werd gevormd? De beide kampen hielden elkaar aardig en soms spitsvondig in evenwicht. Op een gegeven moment waren alle pro's en contra's wel uitgewisseld en is dit topic gesloten.
Ook vraag 18 leidde tot veel, vooral negatief, commentaar, ook al omdat vrijwel elke docent wist te melden dat slechts een enkeling een antwoord op de vraag wist: het herleiden van een formule met breuken en haakjes, na het invullen van enkele parameters, tot een lineaire vorm. Te moeilijk? Vraag verkeerd gesteld? 'Dat kandidaten de vraag vanwege de decimalen en exponenten die in de constanten staan lastig vinden, is mogelijk. Het gaat echter om een platte handeling met een eenvoudige eerstegraads formule die binnen de

basisvaardigheden valt die een examenkandidaat voor dit vak hoort te beheersen', aldus de weergave door het LAKS van een telefonische toelichting van de CEVO hierop.
Havo A vraag 6 leverde ook veel reacties op. Op grond van de gegevens van een aantal landen, weergegeven met punten in een assenstelsel, was met een trendlijn een model weergegeven van het verband tussen aantal vuurwapens en het aantal sterfgevallen door vuurwapens (***zie figuur 2***). Voor lagere aantallen vuurwapens was de correlatie vrij sterk, maar vooral bij grotere aantallen waren er uitschieters naar boven en beneden. Er werd gevraagd om op grond van de figuur een argument te geven dat voor- zowel als tegenstanders van vuurwapenbezit konden gebruiken voor hun standpunt. Dat was voor veel collega's moeilijk nakijken, zo'n verbaal antwoord, even heel iets anders dan een berekening. 'Belachelijke vraag', 'Rampzalige vraag'. 32 reacties met allerlei visies op een dergelijke vraag en allerlei mogelijke antwoorden, want er leek ontzettend veel geconcludeerd te kunnen worden uit de figuur als het aan de leerlingen lag. De wil om het CV strak toe te passen leek bij een aantal respondenten niet erg aanwezig.



figuur 2 havo A 2009, Hebben is schieten?

Havo B

Bij havo B was vooral vraag 2 punt van discussie en aanleiding tot uitwisseling van standpunten: een in woorden omschreven kwadratische vergelijking algebraïsch oplossen en daarna het antwoord afronden. De gegevens waren gebaseerd op afgeronde meetgegevens, dus past de exactheid van een algebraïsche oplossing daarbij? Er werd nog even stevig doorgediscussieerd over 'exact' en 'algebraïsch' en het verschil daartussen. De omschrijving van de vergelijking bleek ook voor meerder uitleg vatbaar, maar de alternatieve uitleg leidde tot zinloze negatieve antwoorden.

Overigens kwam bij havo B de grote onvrede over dit eerste examen bij het vernieuwde vak in veel topics naar voren: de discrepantie tussen wat verwacht werd en wat het examen geworden is bleek groot. Vooral vraag 12, naar de hoek tussen twee vlakken, wekte, ondanks de, redelijk vage, aanwijzing met behulp van en figuur veel verbazing.

Vwo A

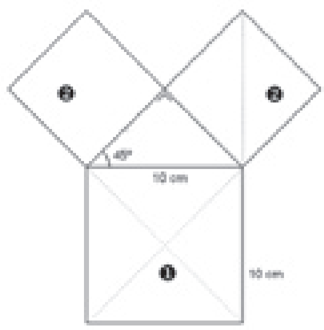
Bij vwo A kwam vrijwel elke vraag uit de examens A1 en A12 in het forum aan bod, de frequentie per vraag bleef relatief laag. Bij A1 vraag 3 (= A12 vraag 2) kwam het tot een discussie over het begrip 'bereken' daar waar leerlingen onmiddellijk, maar zonder berekening, het resultaat van de gevraagde berekening opschreven (en meestal daarna controleerden). Het kwam ook in de andere fora regelmatig voor dat de nomenclatuurbegrippen toch ruimer geïnterpreteerd werden dan de uitleg van het begrip in de nomenclatuurlijst doet vermoeden. Sommige collega's vonden dan weer dat enkele andere collega's te veel naar ruimte zochten om op puntenjacht te kunnen gaan in het voordeel van hun leerlingen dan dat ze zich strikt aan het CV en de vakinhoud hielden. Maar over het algemeen kan gezegd worden dat de ene collega de ander voorthielp met een reële interpretatie van het CV in geval het antwoord van een leerling te wensen over liet.

Vwo B

Bij vwo B ontspon zich een hele discussie rond het advies van de landelijke examenbespreking rond B1 vraag 10 (= B12 vraag 8) waarin de kettingregel een essentiële rol speelde. 'Productregel fout, dan blijft er niets meer over' en dus 0 van de 6 punten? Leerlingen die in de fout gingen, rekenden nog wel een heel eind door, zonder op het aan te tonen antwoord te komen, en dan had menig collega nog wel een puntje over voor correcte stappen daarin. Ook hier speelde de steeds terugkerende controverse 'sprokkelen/stapelen' weer een rol.

Vmbo

Traditiegetrouw was het aantal reacties op het forum vmbo BB klein: dit keer slechts één, over het digitaal examen. Deze reactie bevatte wel enige gegronde (?) kritiek.
'In de syllabus staat bij de toelichting op pagina 15: "Bij landkaarten moet ook gedacht worden aan het interpreteren van hoogtelijnkaarten."
In de wiskundemethode hebben de BL-leerlingen geen theoretische informatie kunnen krijgen over hoogtelijnen. Alleen in een gwa-opdracht (klas 3)[3] heeft een bergkaart gestaan zonder hoogtelijnen.
(…) Persoonlijk vind ik dat vragen over hoogtelijnkaarten niet in het BL-examen thuishoren gezien de complexiteit van het onderwerp.'
Op het KB-forum staan een 10-tal topics. Wat het examen zelf betreft: 'Mooie diversiteit aan onderwerpen: rekenen, kijklijnen, derde macht, inklemmen, gonio, Pythagoras, algebra, schaal, koershoeken, nauwkeurigheid (BSN), rekenmachinegebruik, oppervlakte, inhoud, kwadratisch, tekenen, hoeken, maten omrekenen.'
Maar ook in dit examen speelde de afrondproblematiek in sommige vraagstukken een rol; zoals bij vraag 13 (= GT vraag 6) waarin de tijd (afgerond op een geheel getal) moet worden berekend die een vloedgolf erover doet om met een gemiddelde snelheid van 350 km/uur een afstand van 2160 km af te leggen. Zo gesteld, en conform het CV, is de uitkomst 6 uur (dat was 6,17…). Maar het ging er hier over hoelang die vloedgolf erover doet om San Francisco te bereiken. En na 6 uur is dat nog niet het geval! Is het correcte antwoord dan 7? Nee, schrijft een collega, want het gaat hier om een waarschuwingssysteem. Je zou volgens hem, de context van het vraagstuk gebruikend, zelfs 6,83 moeten afronden op 6. Maar is 17/100 × 60 minuten voldoende vroeger om te waarschuwen voor een mogelijke ramp?



figuur 3 vmbo GL/TL 2009, Wiskunde en kunst (aangepast)

Het GT-forum telde zo'n 40 topics. Met als uitschieter het vraagstuk getiteld 'Wiskunde en kunst'. Er waren 23 reacties bij vraag 21 (***zie figuur 3***): 'Laat zien dat de vierkanten

met rangnummer 2 op deze poster beide een oppervlakte hebben van 50 cm^2.'
Moet de leerling vermelden dat hij 'Pythagoras' gebruikt? Krijgt een leerling alle punten als hij alleen opmerkt dat 100 / 2 = 50? Is schaalrekenen (na het meten in de figuur zelf) een andere vakinhoudelijk correcte manier van oplossen? Een erg korte oplossing: $\sqrt{50} = 7{,}07$; $7{,}07 \times 7{,}07 = 50$ cm^2. Is dit een cirkelredenering, of heeft de leerling hier in de eerste stap de lengte van de rechthoekszijde van de driehoek berekend? En dan ook, naar aanleiding van een alternatieve oplossing in het CV (***zie figuur 4***): 'Ik vind de stap van tekenen van de diagonalen naar de conclusie dat ze allemaal de zelfde oppervlakte hebben wat groot. Misschien is dat het probleem bij dit derde alternatief.'
Maar de PRIMEUR op dit forum, en ook een primeur als zodanig, was wel de mededeling dat de uitwerkingen van alle 24 vragen van het examen GL/TL geheel via YouTube [4] te zien zijn!

Nacht- en vakantiewerk

Een andere analyse van de bijdragen in het forum laat zien dat veel docenten de vrije dagen rond Hemelvaartsdag en Pinksteren druk hebben doorgewerkt. Ook op de andere dagen werd het werk niet snel aan de kant gelegd: er waren bijdragen op de fora die ver na middernacht nog werden geplaatst. Wat dat betreft was de oproep om tijd te schrijven (in de *WiskundE-brief*) bij de correctie van het examen een goede mogelijkheid om lucht te geven aan het ongenoegen over de grote inspanning die in korte tijd geleverd moest worden. Verder viel op dat er in verschillende fora steeds dezelfde namen terugkeerden: een aantal collega's had duidelijk veel meer dan één examengroep om na te kijken.

Tot slot

Hoewel de opkomst bij de regionale besprekingen van de examens varieert (wegens tijdgebrek door de piekbelasting rond de examens?) blijkt de behoefte om met elkaar te communiceren over examenvragen, de antwoorden, de normering en de vele vakinhoudelijke aspecten die daarbij een rol spelen, erg groot en wordt er dankbaar gebruik gemaakt van de examenfora, die immers op elk moment van de dag, en de nacht, aan te spreken en te raadplegen zijn. Namens de vragende collega's derhalve hartelijk dank aan de antwoordende collega's voor hun hulp, inzicht en mening.

21 maximumscore 4

- Er geldt: $\cos 45° = \dfrac{\text{zijde vierkant}}{10}$ — 2
- De zijde van het vierkant is dan 7,07… (cm) — 1
- De oppervlakte van het vierkant is $(7{,}07\ldots)^2 = 50$ (cm^2) — 1

of

- Uitgaande van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijde 5 en een hoek van 45° geldt $\cos 45° = \dfrac{5}{\text{zijde vierkant}}$ — 2
- De zijde van het vierkant is dan 7,07… (cm) — 1
- De oppervlakte van het vierkant is $(7{,}07\ldots)^2 = 50$ (cm^2) — 1

of

- Tekenen van twee diagonalen in het grote vierkant en één diagonaal in het kleinere vierkant — 1
- De zes driehoeken die zijn ontstaan hebben allemaal dezelfde oppervlakte — 1
- De oppervlakte van elke driehoek is (100 : 4 =) 25 (cm^2) — 1
- Dus is de oppervlakte van het kleinere vierkant (2×25 =) 50 (cm^2) — 1

figuur 4 vmbo GL/TL 2009, uit het correctievoorschrift

Noten

[1] Zie: *www.nvvw.nl/page.php?id=7809&rid=578&topicID=1250&view=list_posts*
[2] Zie: *www.nvvw.nl/page.php?id=749&rid=578&topicID=1195&view=list_posts*
[3] gwa = geïntegreerde wiskundige activiteit
[4] Zie: *www.youtube.com/view_play_list?p=D3EE5B4B3D1A538F*

Over de auteurs

Erik Korthof was tot voor kort docent wiskunde Tweede Fase aan het Bonhoeffer College te Enschede en maakt inmiddels gebruik van de fpu. Hij is moderator van de open fora van de NVvW-site.
E-mailadres: *eskorthof@hetnet.nl*
Dick Klingens is docent aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel; daarnaast is hij eindredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *dklingens@pandd.nl*

Examens havo A, nieuwe stijl

[Rob van Oord]

Algemene indruk

Gezien het tijdstip en de aard van het examen was het aantal bezoekers van de regionale NVvW-examenbespreking dit jaar groter dan de laatste jaren het geval was. In Rotterdam kwamen tien docenten uit de regio, terwijl een aantal belangstellenden (noodgedwongen) had gekozen voor de bijeenkomst voor havo B een deur verderop. Een opvallend groot aantal (jongere) collega's bezocht dit evenement voor het eerst.
Hoewel ik voorzitter was, had ik dit jaar zelf geen examenklassen havo A. Ik baseer mijn bevindingen op de verhalen van collega's en een impressie aan de hand van het werk van een tiental leerlingen van een van mijn collega's, en hun scorelijsten. De eerste indruk van het examen was positief.
Men vond dat het niveau van dit examen iets hoger lag dan de oude A12-examens. Startopgave, spreiding over de stof, leesbaarheid, aantal routine vragen en correctievoorschrift werden over het algemeen met goed beoordeeld.
De omvang was aan de ruime kant. Er zaten relatief veel originele vragen in.

Algebra

Het gevreesde aantal vragen met algebra vond men goed. Maar de vragen zelf behoeven enig commentaar. De algebra zat in opgave 3 over *Volumes*. Er zijn formules waarmee je de inhoud van opgeblazen papieren zakken, kussens en vuilniszakken kunt berekenen.
Zo is de formule voor een kussen:
$V = a^3 \cdot (0{,}142 \cdot 0{,}1^r + 0{,}318 \cdot r - 0{,}142)$
Hierin is $r = \frac{b}{a}$ de verhouding tussen de langste zijde b (in dm) en de kortste zijde a (in dm) van de platte rechthoekige zak die wordt opgevuld (of opgeblazen) tot kussen.
In vraag 15 moest worden aangetoond dat voor een vierkant kussen met zijden a de formule vereenvoudigd kan worden tot:
$V = 0{,}1902 \cdot a^3$
De algebra zat hem hierin dat de leerlingen de breuk $\frac{a}{b}$ met $b = a$ moeten vereenvoudigen tot 1.
Wij snappen niet dat de samenstellers van het examen niet hebben bedacht dat geen leerling dit doet. Logisch is dat ze de $a = 4$ van de vorige vraag (de inhoud berekenen van een kussen met $a = 4$ en $b = 6$) nemen. Dan krijg je $r = \frac{4}{4} = 1$. Invullen van $r = 1$ geeft het gewenste resultaat. Ik zie op de scorelijsten van mijn collega dat hij voor het nemen van $r = 1$ bij een voorbeeld (zoals bij $a = 4$) het volle aantal punten heeft gegeven. Ik zag zelf bij het doorkijken van het werk, dat er ook leerlingen waren die kennelijk met de rekenmachine gewoon
$0{,}142 \cdot 0{,}1 + 0{,}318 - 0{,}142$
hadden berekend (= 0,1902) en opmerkten dat je bij een vierkant kussen r in de formule gewoon kunt weglaten. Dat is natuurlijk wel fout.
Zelf had ik meer een opgave algebra verwacht waarbij haakjes moeten worden uitgewerkt:
'Schrijf zonder haakjes: $(x - 6)^2 - 36$'
of een opgave waarbij een lineaire vergelijking met een variabele erin zou moeten worden opgelost:
'Druk x uit in a bij $3(x - 6) = 45a$'
Nu ging de tweede algebravraag (vraag 18) wel over haakjes uitwerken, maar met een dermate ingewikkelde structuur dat geen leerling daar uit kwam. Door de leerlingen van mijn collega's is er geen enkele punt gescoord voor deze vraag. Het volume van een vuilniszak wordt berekend met:
$$V = a^3 \cdot \left(\frac{b - x}{3{,}142 \cdot a} - 0{,}519 \right)$$
Voor vuilniszakken met een korte zijde van (a =) 5 dm en een lange zijde van (b =) 7,5 dm is het volume lineair afhankelijk van de hoogte van de knoopstrook (x).
De vraag is om de gegeven formule te herleiden tot de vorm $V = p \cdot x + q$.
Probeert u het zelf eerst eens.
Ook al jammer dat er niet voor het beter herkenbare $V = a \cdot x + b$ is gekozen. Dan moesten de eerder gebruikte letters a en b wel anders gekozen zijn. Dat had makkelijk gekund (zie Naschift).

De eerste drie opgaven

De startopgave ging over de maten van *Autobanden*. Een interessante opgave over de betekenis van de getallen die op een autoband staan. Bijvoorbeeld 185/65 R 14 86 T. De breedte van de band is 185 mm, de hoogte is 65% daarvan, de diameter van de velg is 14 inch, en 86 is het *Load-Index*-getal voor het draagvermogen (in kg) van de band. De omrekeningstabel van *LI*-getal naar kg was gegeven. Een mooie opgave met zinvol rekenwerk, ook met lineair (interpoleren) en exponentieel verband. Zoals de lezer kan narekenen, is de diameter van de genoemde band 60 cm. Dit was ook de eerste vraag van dit examen.
Vraag 2 was een 'telvraag'... ongeveer een kwart van de leerlingen trapt in de valkuil: hoeveel maten zijn er van 145 t/m 215 met stappen van 10? Ze deden 215 – 145 = 70, 70/10 = 7, dus 7 maten. Het lineair interpoleren (vraag 3) was voor een kwart van de leerlingen een probleem. Het exponentiële verband (vraag 4) kon maar door een klein aantal leerlingen goed worden opgelost.
Bij vraag 5 moest enige creativiteit aan de dag gelegd worden, en gesnapt worden dat de bandhoogte twee maal in de diameter van een band zit. Dit was voor de meeste leerlingen geen probleem. Een vervelende bijkomstigheid was dat enkele leerlingen in de tekst boven vraag 2 hadden gelezen dat er alleen banden worden geleverd met een velgdiameter van 13, 14 en 15 inch, en dit bij vraag 5 nog in hun hoofd hadden zitten. Het antwoord van vraag 5 was echter een velgdiameter van 17 inch. Dit schiep bij sommige leerlingen verwarring. Laten de examenmakers ook de tekst nog eens goed op dit soort tekstdualiteiten screenen.
Boven vraag 2 staat wel dat het over een

bepaald soort band gaat, maar verderop in de tekst wordt niet gemeld dat het over andere soorten banden gaat.
De tweede opgave ging over wapenbezit en sterfgevallen door vuurwapens (*Hebben is schieten?*). Er was veel kritiek op vraag 6 waarin argumenten genoemd moesten worden die uit de afgedrukte grafiek te halen waren, zowel voor voorstanders als voor tegenstanders van vuurwapenbezit. ‘Dat is toch geen wiskunde’, hoorde ik roepen. Toch vind ik dat op deze manier goed recht gedaan wordt aan het afvragen van de eindterm uit domein D Statistiek, subdomein D2: ‘De kandidaat kan (…) een gegeven grafische representatie interpreteren.’[1]
Mogelijk had de vraag iets wiskundiger geformuleerd kunnen worden. Bijvoorbeeld na de stam: Je kunt zowel de trendlijn als de onderlinge ligging van de kogeltjes gebruiken als argument bij de discussie over wapenbezit. Vraag: Leg uit hoe door elk van beide groepen, voorstanders van wapenbezit of tegenstanders van wapenbezit, de trendlijn of de kogeltjes als argument gebruikt kan worden. Het is ook niet duidelijk of de leerlingen nu door hadden dat de eenheden relatief waren gegeven. Dit is nodig om landen met zeer uiteenlopende aantallen inwoners te kunnen vergelijken. Bovendien waren er leerlingen die zich door deze open vraagstelling lieten verleiden tot het geven van een mening over wapenbezit in relatie met de geweldsdrama’s op scholen (in de VS) waar oud-leerlingen hun frustraties afreageren op onschuldige docenten en leerlingen. ‘In Amerika kan je makkelijk aan wapens komen.’ Samenstellers van examens hadden er goed aan gedaan te beseffen dat bij deze vraag, en ook bij de vragen over de *Datingshow*, persoonlijke ervaringen voor verwarring kunnen zorgen bij de leerlingen. De teksten moeten zakelijk zijn en geen emoties oproepen. Het gaat er per slot van rekening om dat de leerlingen wiskundige activiteiten kunnen laten zien.
De derde opgave ging over scores bij een *Motivatietest*. ‘Goed lezen’ was een vereiste om de vragen goed te kunnen beantwoorden. De grafiek onder de normale kromme was in 9 categorieën verdeeld, en niet in 5 zoals bij de vuistregels. Na enkele vragen over de normale verdeling volgden vragen over de binomiale verdeling, waaronder $P(X \geq 6 \mid n = 25, p = 0{,}11)$, ook nieuw in de havo A-examens.
Het differentiëren is uit het programma verdwenen, wat mij betreft een gunstige ontwikkeling. Er was altijd een grote groep leerlingen die dit maar niet onder de knie kon krijgen. De binomiale verdeling en meer algebraïsche vaardigheden, maar dan op een te behappen niveau, maken het A-programma evenwichtiger. Daarom is het jammer dat er na 2014 in het centrale examen geen vragen meer gesteld worden over kansrekening en statistiek.

De vraag over de score die je moet hebben om bij de beste 20% te behoren (vraag 11), is slecht gemaakt. Ik denk dat leerlingen het lastig vinden om die 20% te vertalen naar de normale kromme. Ook zullen ze de inleidende zin over de beste 11% onvoldoende in verband gebracht hebben met de vraag. Als er een bijlage was geweest waarop ze eerst die beste 20% zouden moeten aangeven, dan waren er vast meer uitgekomen.

De laatste opgave

De laatste opgave ging over kansen bij een *Datingshow*. Weer een opgave met veel tekst. We vonden de vragen niet logisch aansluiten bij de tekst en daardoor werden de leerlingen op het verkeerde been gezet. Zo stond er dat Maaike bang is dat alle televisiekijkers zien dat ze door niemand wordt gekozen en zich vervolgens afvraagt hoe groot de kans is dat ze door minstens één van de jongens wordt gekozen. Dit is wat vergezocht want je weet dat je door alle televisiekijkers wordt bekeken als je aan dergelijke tv-spelletjes meedoet. Ik zou gezegd hebben: Maaike is benieuwd naar hoe populair ze bij de jongens is en vraagt zich af hoe groot de kans is dat minstens één van de jongens haar kiest. Misschien is dit de reden voor de zeer lage score.
Het daten van 3 jongens en 3 meisjes kan per show maximaal 3 stelletjes opleveren. Voor vraag 20 moesten alle mogelijke manieren worden opgeschreven van precies drie stelletjes bij een show. Een leuke vraag waar ongeveer de helft goed uitkwam.
Vraag 21 ging over de verwachtingswaarde van de kosten van de door de stelletjes gewonnen reizen. Een min of meer standaardvraag.
De laatste vraag (22) was een onvervalste kanssom. Een mooie afsluiting van het examen. Je moest goed snappen waarover het ging: de kans dat in de eerste drie shows van het seizoen in totaal slechts één stelletje gevormd wordt. Dus combinaties van shows met 0 en met 1 gevormd stelletje.
In de tabel boven de vraag was te vinden hoe groot de kansen zijn op opvolgend 0, 1, 2 of 3 stelletjes per show. Ook bij deze vraag was de tekst in de stam niet logisch. ‘Het is gunstig voor de kijkcijfers als er in elke show één of meer stelletjes gevormd worden.’ Toch wordt niet deze kans gevraagd, maar juist de kans voor ongunstige kijkcijfers. Ik zou de stam van de vraag dan anders gesteld hebben, of de vraag hebben toegesneden naar de stam.
Dat de opgave uiteindelijk weinig met de praktijk van doen heeft, vind je in de zinsnede: ‘In deze opgave gaan we ervan uit dat de jongens en de meisjes willekeurig kiezen, …’. Niets is minder waar, denk ik.

Zelfs bij ‘Daten in het donker’ wordt er op van alles gelet bij de keuze van de date.

Naschrift

Inmiddels zijn ook de examens van het tweede tijdvak geweest. Tot mijn verbazing (en blijdschap) zie ik dat daarin precies een opgave staat die ik had verwacht!
In de opgave *Verf* wordt voor vraag 4 de hoeveelheid verf (inhoud blik: H = 15 liter) in verband gezet met te verven oppervlakte (A m²), dikte van de verflaag (d = 60 micrometer), percentage vaste stof (V = 67%) van de verf en het verliespercentage door de kwast (p%). Dit leidt tot de formule:

$$15 = \frac{10 \cdot A \cdot 60}{67(10 - p)} \quad (\textit{hierin is } 10 \textit{ een constante})$$

Het verband tussen A en p is lineair. De formule is dus te herschrijven als:
$A = a \cdot p + b$
Vraag 4: Bereken a en b. Dat bedoel ik nu. Zelfs de letters a en b zijn op de voor leerlingen vertrouwde plaats gezet. Je zou ook gewoon naar het lineaire verband kunnen vragen. Maar voor havo-A is dat misschien nog een deur te ver.
In de vraag ervoor (3) moest een lineaire vergelijking worden opgelost. Daar zou ik zelf ‘algebraïsch’ [2] bij gezet hebben. Een basisvaardigheid bij vergelijkingen met een breuk. In de vergelijking:

$$2{,}5 = \frac{10 \cdot A \cdot 70}{35(100 - p)}$$

moet eerst een waarde voor p (als het goed is p = 5) worden ingevuld. Dan krijg je de vergelijking:

$$2{,}5 = \frac{10 \cdot A \cdot 70}{35 \cdot 95}$$

Ik train de leerlingen op de volgende aanpak: denk eraan, letters zijn ook maar getallen, wat denk je bij $\frac{12}{4} = 3$? Ik wil dat ze dan zeggen ‘$\frac{12}{4} = 3$, want 3 · 4 = 12’. Dus, $\Delta = \frac{\square}{\odot}$ hoort bij $\odot \cdot \Delta = \square$. Ik vind dat ze dit moeten kunnen toepassen bij een vergelijking als deze. Nu wordt het weer iets met ‘CALC intersect’ of ‘Solver…’.
Ik vind dat basisoperaties als delen, vermenigvuldigen, vereenvoudigen, met eventueel in de teller of noemer iets tussen haakjes, tot de bagage van de havo A-leerling moet behoren.
Vraag 17 gaat over spaarrekeningen met exponentiële groei. Daar moet de vergelijking:
$10000 \cdot 1{,}02^t = 9900 \cdot 1{,}03^t$
worden opgelost. In het correctievoorschrift staat: ‘Beschrijven hoe deze vergelijking (bijvoorbeeld met de GR) kan worden opgelost.’ Dat tussen haakjes van *bijvoorbeeld met de GR* suggereert dat het ook anders kan. Daar zou ik dan ook liever ‘algebraïsch’ bij gezet zien. Echter, in de lijst met vaardigheden[3] staat geen kruisje bij exponentiële vergelijkingen. Ik vind dat eenvoudige exponentiële vergelijkingen door havo A-leerlingen voortaan algebraïsch moeten kunnen worden opgelost. Nu is deze vergelijking net weer iets te moeilijk, want je moet snappen dat eerst $\frac{1{,}02^t}{1{,}03^t}$ herleid moet worden tot $\left(\frac{1{,}02}{1{,}03}\right)^t$, en dat is niet standaard.
Maar goed, volgend jaar heb ik weer twee havo-5 wiskunde A klassen. Ik ben zeker van plan om de besproken en nog andere algebraïsche basisvaardigheden te gaan eisen.

Noten

[1] De eindtermen zijn te vinden via de site van de vereniging, *www.nvvw.nl*, onder Eindexamens VO.
[2] Zie de lijst *Nomenclatuur HAVO/VWO 1998*; Algemene begrippen. Merkwaardig genoeg staat het woord ‘algebraïsch’ niet aangekruist in de lijst bij havo-A, *Nomenclatuur HAVO/VWO 2007*, terwijl algebraïsche vaardigheden toch expliciet in de nieuwe eindtermen zijn opgenomen onder subdomein A5.
[3] Kijk op de NVvW-site (*www.nvvw.nl*) en klik door naar Onderwijs | Eindtermen | Havo/VWO | (dan, op de pagina zelf) De examenprogramma’s van de Vernieuwde tweede fase (2007-2010) | havo wiskunde A - handreiking schoolexamen | (en kies *in* het PDF-bestand pag. 53) Bijlage 4 Algebraïsche vaardigheden en de kruisjeslijst.

Over de auteur

Rob van Oord is docent op het Coenecoop College te Waddinxveen.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

CSE VWO A12 – 2001 t/m 2009

[Gerard Koolstra]

Het vwo-examen wiskunde A12 is het laatste van een reeks die in 2001 begon. Omdat het toekomstige wiskunde A-examen vermoedelijk echt anders van karakter wordt dan het A12- en/of het A1-examen, lijkt het nu een goed moment om terug te blikken. We gebruiken het laatste examen (1e tijdvak) als leidraad. Het is handig om de opgaven bij de hand te hebben.[1]

Omvang

De opgaven staan in een boekje van (exclusief voorpagina) 10 pagina's waarin 20 vragen staan verdeeld over 5 opgaven – in dit geval keurig twee tegenover elkaar liggende pagina's voor elke opgave. Hoewel de A-examens ook vóór de tweede fase veel taliger waren dan de toenmalige B-examens, paste bijvoorbeeld het examen van 1987 (1e tijdvak) nog op 3 kantjes. In de loop van de jaren '90 werd 6 tot 8 pagina's heel normaal. De omvang lijkt daarna nog wat verder toegenomen, en af en toe wordt daar stevig op gemopperd. Bedacht moet daarbij worden, dat de laatste jaren voor een wat ruimere lay-out is gekozen, wat in ieder geval prettiger oogt. Een andere kwestie is: hoeveel tekst en ruimte heb je nodig om een vraag te stellen? Ik kom daar nog op terug.

Rechten (en plichten)

De startopgave van dit jaar gaat over een actueel thema: verhandelbare *Emissierechte*n. Het is duidelijk dat er eindtermen worden getoetst op het gebied van *Functies en Grafieken* (domein Bg) en *Differentiaalrekening met toepassingen* (domein Ba), maar welke?

De eerste vraag (wat is voordeliger extra rechten kopen of extra investeren en juist rechten verkopen?) lijkt een simpel rekensommetje. Wat is voordeliger:

1. 5 000 × € 10 euro betalen, OF
2. € 60 000 betalen en 5 000 × € 10 terugverdienen ?

Zo beschouwd lijkt het wel erg kinderlijk eenvoudig – zelfs als 'binnenkomertje'. Op basis van dergelijke opgaven is in het verleden vaak kritiek geuit op het niveau van de eindexamens. '*Mijn nichtje van 11 kan dit ook*' is een kernachtige samenvatting van deze kritiek.
Toch is een dergelijke vraag goed te verdedigen vanuit de gedachte dat de kandidaten zo gedwongen worden zich te verdiepen in de werking van het systeem. Fouten bij deze vraag zijn ook meestal te herleiden tot het niet goed doorhebben 'hoe het werkt', wat zich bijvoorbeeld uit in dubbeltellingen. In dit verband wordt vaak de klacht vernomen dat het *meer gaat om tekstverklaren dan om wiskunde*.
Daar staat tegenover dat *'met een wiskundige bril'* kunnen lezen (en beluisteren) van teksten (bijvoorbeeld nieuwsberichten) gezien kan worden als een belangrijk doel van wiskunde(-A) onderwijs. De Engelse uitdrukking '*mathematical literacy*' zegt in dit verband misschien meer dan het Nederlandse 'gecijferdheid', dat voor velerlei uitleg vatbaar lijkt.
De tweede vraag bouwt voort op de vorige (bij welke prijs voor één emissierecht zijn beide opties even duur?). Het opstellen van een eenvoudige lineaire vergelijking, of een korte winst-verlies-beschouwing levert het antwoord. In de eenvoud (en het ronde antwoord) schuilen echter ook weer tal van problemen bij het beoordelen. Sommige leerlingen geven het antwoord zonder toelichting, anderen controleren wel, weer andere… Dat geeft een boel gedoe, en discussie bij de betrokken docenten.
Eenvoud geeft soms ook een hoop complicaties. Het valt me op dat (ook buiten de examens) er bij veel opgaven sprake is van enerzijds (door een mooie uitkomst bijvoorbeeld) *de gelegenheid bieden* iets op een bepaalde manier aan te pakken, en dat tegelijk te *verbieden.* Deze situatie vind ik wat onbevredigend. Het is vaak mogelijk om het vraagstuk zo te componeren dat een inferieur geachte aanpak ook inderdaad inferieur blijkt.
Bij de derde vraag moet er gedifferentieerd worden. Sinds het gebruik van de GR lijkt het onontkoombaar dat dit er expliciet bij gezet wordt. In dit examen zijn er twee vragen waarbij een afgeleide moet worden bepaald. In het verleden was dat meestal één vraag. Ook de moeilijkheidsgraad lijkt in de loop van de jaren toegenomen.[2] Eenvoudige machtsfuncties (zoals in 2001-2003) komt je weinig tegen, en in 2008 moest zelfs twee keer de kettingregel toegepast worden.
Bij deze vraag gaat het om de Kosten als functie van de vermindering van de uitstoot, gegeven als een quotiënt waarvan de teller toeneemt en de noemer afneemt (als de uitstoot verder wordt verminderd). De te berekenen afgeleide is een breuk bestaande uit een positieve constante gedeeld door een kwadraat. Gevraagd werd met behulp van deze afgeleide te beredeneren dat de Kosten toenemen.
Dat lijkt, zeker voor de leerlingen met economie, een *appeltje-eitje*: de Marginale Kosten zijn altijd positief, dus de Kosten nemen toe. Om een of andere reden worden veel leerlingen in de verleiding gebracht om uitspraken te doen over de *toename van de afgeleide*. Bij een grafische voorstelling valt inderdaad ook de toename van helling meer op dan het positief zijn daarvan.
Je kunt je afvragen of in dit geval gebruik van de afgeleide niet wat overdreven is. Bij het A1-examen werd de vraag gesteld om op basis van het functievoorschrift te beredeneren dat de Kosten altijd toenemen als de uitstootvermindering toeneemt. Misschien was het fraaier geweest om deze vraag ook in dít examen te stellen, en daarna de vraag om *met behulp van differentiëren* te laten zien dat de marginale kosten toenemen als de uitstootvermindering toeneemt.
De vierde vraag gaat over een verzameling winstfuncties met een bijbehorende bundel grafieken. Kern van de vraag is het gemeenschappelijke punt van de grafiekenbundel. Volgens mij is dit geen onderdeel van het examenprogramma A12, maar in het verleden is de CEVO vaker akkoord gegaan met oprekking van 'hetgeen gevraagd mag worden'.[3]
Opmerkelijk is dat de Winstfunctie(s) zonder meer wordt gegeven, terwijl deze met behulp van het voorgaande toch ook af te leiden (of eventueel te controleren) was geweest. Een *in de context beschreven samen-*

hang vertalen in een functievoorschrift staat wél genoemd als één van de eindtermen!
Bij het opstellen van een dergelijk functievoorschrift wordt duidelijk dat het bedoelde gemeenschappelijke punt van de grafiekenbundel overeenkomt met de situatie dat het bedrijf zijn uitstoot aan de hoeveelheid emissierechten aanpast, dus niets koopt en verkoopt. Ik vraag me af wie nu deze link gelegd heeft.
De vijfde (en laatste) vraag over dit thema legt de uitstootvermindering vast en vraagt bij welke prijzen van emissierechten er verlies wordt gemaakt. De Winstfunctie wordt een lineaire functie van p, zoals in het correctievoorschrift (CV) goed te zien is. Voor de aanpak is deze constatering niet essentieel, met behulp van de GR is vrij eenvoudig uit te zoeken wanneer er verlies wordt gemaakt. Ik krijg toch een vaag gevoel dat hier een kans is gemist.

In de minus

In de (tweede) opgave *Nominaal volume* komen vooral kansverdelingen aan de orde. Afgaande op het examenprogramma gaat het in feite om de normale en de binomiale verdeling.
De Europese richtlijnen voor inhoud, gewicht e.d., en met name de betekenis van de 'e' achter aanduidingen op verpakkingen is een dankbaar onderwerp voor vragen op het gebied van kansrekening/statistiek. Het past erg bij het vak en is een 'levensechte' context. Probleem is wel dat zelfs een korte beschrijving van de wijze waarop het systeem in elkaar zit, behoorlijk wat voeten in de aarde heeft. Gelukkig kan een belangrijk deel van de informatie in een tabel worden samengevat.
De eerste vraag van dit onderdeel (een grafiek maken bij een tabel) zie ik ook weer als een soort controle vraag. Wanneer je aanneemt (of door hebt) dat er geen sprongen in de grafiek zitten, is de opdracht kinderlijk eenvoudig; zo niet dan is het nog een vrij tijdrovende klus.
De tweede vraag (vraag 7) vraagt een (nauwkeuriger) berekening van de standaardafwijking op basis van gegeven gemiddelde en gegeven kans. Probleem met een dergelijke opgave is dat de moeilijkheids-graad erg afhankelijk is van de beschikbare technologie (en uiteraard de vaardigheid daarmee om te gaan). In de 'ideale' situatie gaat het om invoeren van wat je weet, en aangeven (met een variabele) wat je wilt weten. Elke scholier kan de was doen! Ik kan me voorstellen dat deze situatie ook tot enig onbehagen aanleiding geeft bij collega's. Wat toetst je dan nog? Het is niet moeilijk om alternatieven te bedenken die een iets meer 'inzichtelijke' aanpak vereisen, zoals het laten bepalen van gemiddelde en standaardafwijking op basis van twee gegeven kansen.
Vraag 8 behelsde eigenlijk een eenvoudige kansbepaling met behulp van de normale verdeling met bekend gemiddelde en standaarddeviatie. Vermoedelijk door de grote hoeveelheid informatie is deze vraag massaal verkeerd opgevat. In plaats van *afwijking in de minus* lazen de leerlingen *meer dan maximale afwijking in de minus* (wat bij de vorige vraag werd aan de orde was). Vooral de leerlingen die deze zelfgeconstrueerde vraag via de snelste methode beantwoordden, hebben hier veel punten gemist. De eerste en tweede correctoren mochten uitmaken wat in deze nog redelijk was.
Bij dergelijke vragen kan ik me de irritaties van collega's goed voorstellen. Door een, op zich correct geformuleerde, grote hoeveelheid informatie, waarbij allerlei nieuwe begrippen worden geïntroduceerd, dan wel (*ondeugdelijk*) een zeer specifieke betekenis krijgen, komt een op zich vrij simpele vraag nauwelijks uit de verf, met allerlei extra problemen voor de correctie.
Ook bij de laatste vraag zijn wat kanttekeningen te maken. In feite gaat het om een hypergeometrische verdeling, die redelijk kan worden benaderd met een binomiale verdeling. Opmerkelijk is dat het correctiemodel behoorlijk streng is ten aanzien van een benadering met de normale verdeling, terwijl de laatste niet veel onnauwkeuriger is[4], en de benadering van de binomiale verdeling door de normale expliciet in het examenprogramma staat. Blijkbaar heeft men zich laten leiden door de stand der techniek, waarbij benadering van binomiaal door normaal steeds minder nodig is, maar benadering van hypergeometrisch door binomiaal wel.[5] Maar de technologische ontwikkeling gaat door…
Vragen over kansverdelingen zijn niet zelden standaardvragen in een wat nieuw jasje. Daar lijkt niet veel op tegen tenzij dat het herkennen van het jasje te belangrijk wordt. Iets fundamenteler gedacht kun je je afvragen in hoeverre de vragen van de afgelopen jaren bevorderd hebben dat leerlingen een betere 'statistische intuïtie' hebben gekregen. Ik heb zo mijn twijfels.

Energievretend

Een eindterm uit het examenprogramma die wel regelmatig wordt getoetst is *uit een grafische representatie zinvolle gegevens aflezen*. Ook vraag 10, de openingsvraag over *Energiebronnen* (opgave 3), test deze vaardigheid. Mij kunnen dergelijke vragen niet erg bekoren. Als het goed is geeft een grafische representatie de grote lijnen van het verhaal weer, voor de meer precieze gegevens zijn tabellen geschikt. Een goede grafische presentatie laten maken op basis van gegevens lijkt me een zinnige bezigheid (mits men eigentijdse technologie mag gebruiken). Het omgekeerde heeft iets kunstmatigs, en iets krakkemikkigs: met een liniaaltje proberen af te lezen hoe groot bepaalde waarden zijn, en op basis van deze gegevens – zonder rekening te houden met de nauwkeurigheid – uitspraken doen. In 2004 bleken de examenmakers trouwens zelf problemen te hebben met het goed aflezen van een somfrequentiepolygoon.[6]
Overigens maakt het antwoordmodel (evenals veel leerlingen doen) het nog eens extra ingewikkeld, door allerlei tussenantwoorden te willen bepalen (waarbij de correctoren weer mogen vaststellen hoeveel de afwijkingen mogen zijn). De vraag naar een vergelijking van het aandeel van aardgas in twee jaren kan bij een lineaire schaalverdeling eenvoudig worden opgelost door quotiënten van lengtes te bepalen. Met een beetje 'timmermansoog' kun je dat zelfs zonder meten. Omrekeningen zijn niet nodig, en de schaal van de afbeelding – nu een punt van aanhoudende zorg – is in feite ook onbelangrijk De berekende percentages in het antwoordmodel blijken trouwens net niet te kloppen met de werkelijke gegevens.[7]
Om het aflezen te vergemakkelijken wordt eerst verteld hoe je gegevens van 1991 kunt aflezen. Helaas zette dat sommige leerlingen op het verkeerde been: ze gingen 2004 met 1991 vergelijken. Kortom, ik word een beetje moe van dergelijke opgaven.
Op vraag 11 is weinig aan te merken, behalve dat er in het antwoordmodel – zoals gebruikelijk – geen aandacht is voor de (on)nauwkeurigheid. De getallen, 4 en 22 miljard (vaten), zijn behoorlijk onnauwkeurig, en vooral de relatieve onnauwkeurigheid van het eerste getal is behoorlijk.[8] De groeifactor 5,5 (22/4) over

24 jaar is daardoor behoorlijk onzeker: tussen bijna 5 en ruim 6 zou beter geweest zijn. De procentuele groei per jaar ligt ergens tussen 6,7 en 8,1% (het CV houdt het op ≈ 7,36%). Extrapolatie van de groei naar 1990 levert een getal op van tussen 61 en 78 miljard vaten. Volgens het antwoordmodel is het (ongeveer) 69 miljard vaten. Dat lijkt me een understatement. Het negeren van (on)nauwkeurigheden is een bekend probleem. Het wordt wel erg wrang wanneer met het (bindende) antwoordmodel in de hand (tussen- en eind-)antwoorden worden fout gerekend die eigenlijk binnen de foutenmarge vallen. [9] Persoonlijk vind ik deze kwestie vele ernstiger dan het al dan niet vermelden van eenheden. (Sommige wiskundecollega's zijn daar fanatieker in dan de voorschriften bij natuurkunde-examens.) Het is in deze context duidelijk wat er bedoeld wordt met (ca.) 70.
Vraag 12 lijkt me een zinnig stukje algebra: het ontwikkelen van een formule voor de som van een (bekende) rekenkundige rij. Vermoedelijk met het oog op de moeilijkheidsgraad wordt het verwachte antwoord gegeven. Ik heb daar toch wat moeite mee. Ik kies zelf in zo'n geval voor een aanpak, waarbij ik eerst een getallenvoorbeeld laat doorrekenen en daarna een algemene formule vraag. Uiteraard moet het antwoord wel in een eenvoudige vorm geschreven worden. Maar een antwoord als $(t + 1)(58 + 0{,}4t)/2$ of $(t + 1)(29 + 0{,}2t)$ of $(t + 1)(t + 145)/5$ is mijns inziens niet minder (eenvoudig, mooi) dan de beoogde kwadratische drieterm. En paar details (zoals het optellen van $t + 1$ termen) maken deze vraag (ongewild?) vrij lastig.
Vraag 13 is typisch een vraag die met de GR goed opgelost kan worden. Helaas – en dat is niet de eerste keer – gaan de examenmakers mijns inziens wat slordig om met de discrete variabele aangeeft die het *aantal jaren* aanduidt die verstreken zijn sinds 2004. De keuze voor t lijkt misschien voor de hand te liggen, maar vind ik wat misleidend, zeker met de toevoeging $t = 0$ *in* 2004. Onjuiste antwoorden, als *in de loop van 2048*, worden er door uitgelokt, en het geeft weer een boel gedoe voor de correctoren.
Bij vraag 14 moeten de leerlingen opnieuw differentiëren, waarbij de vraagstelling toepassing van de kettingregel suggereert. Zoals gezegd, de differentieeropdrachten zijn een stuk pittiger geworden in de loop der jaren.

Wijd verspreid

Het is een slecht, maar blijkbaar onuitroeibaar, gebruik om onderwerpen die van het centraal examen zijn uitgesloten, via een omweg binnen te loodsen. Het onderwerp matrices behoort niet tot het centraal examen en is wellicht in de 5e klas afgesloten. Toch worden over het onderwerp *Euroverspreiding* (opgave 4) twee vragen gesteld die met matrixrekening (en het slim gebruik van grafen) heel eenvoudig opgelost kunnen worden. Vanwege de raakpunten met discrete dynamische modellen kan men volhouden dat de vragen niet buiten het examenprogramma vallen, maar fraai is het niet.
Vraag 15 is zeer simpel en snel op te lossen met behulp van de derde macht van de 2×2-matrix van overgangskansen. Uiteraard kan het ook zonder matrixrekening, maar dat is veel tijdrovender. Opmerkelijk is dat het vergeten van één van de vier mogelijkheden meestal leidt tot een correct antwoord (er wordt uitdrukkelijk gevraagd om 4 decimalen). Lijkt me een misser.
Bij vraag 16 wordt naar de evenwichtssituatie gevraagd, maar de formulering ('*op den duur*') suggereert misschien iets te veel *brute force* aanpak met de GR. Dit leverde soms lange wachttijden en (te) onnauwkeurige antwoorden op. Een winst-verlies-aanpak levert echter heel snel het gevraagde antwoord. Wat frustrerend om te zien hoe leerlingen die dit bij het onderwerp matrices perfect beheersten, nu aan het zwoegen slaan. Naar mijn idee een misser!
Het onderwerp *Discrete Dynamische Modellen* keert niet terug in het nieuwe examenprogramma.
Ik vind dat persoonlijk heel jammer, hoewel het onderwerp mijns inziens beter tot zijn recht komt als je wat meer kunt inzetten dan een GR. Het is indrukwekkend welke werelden je kunt scheppen met een paar simpele recursieve betrekkingen en de overeenkomst met werkelijke (complexe) systemen is soms verbluffend. Het is ook een van de weinige onderwerpen waarbij ontdekkingen van de laatste 50-100 jaar in de klas kunnen worden besproken. Hopelijk dat het onderwerp een tweede leven krijgt als keuzeonderwerp.
In de laatste vraag van dit deel komt toetsen van hypothesen aan de orde. Lijkt me een goede vraag, hoewel de formulering waarbij een bevestiging van een vermoeden neer komt op het *verwerpen* van de nulhypothese sommige leerlingen op het verkeerde been kan zetten. Naar mij idee valt hier echter niets te verwijten. In ieder geval is door de vraagstelling onduidelijkheid rond één- of tweezijdig toetsen vermeden.

Wedden

De drie laatste vragen (die van de opgave *Wedden*) zijn vrij kenmerkend voor het examen.
Een simpele rekenvraag, die tevens toetst of men de informatie goed heeft opgenomen, een vraag naar de verwachtingswaarde die zonder kennis van dit begrip opgelost kan worden, en tenslotte een behoorlijk pittige vraag, waarbij geen duidelijke hint wordt gegeven over een mogelijk aanpak, maar gehoopt wordt dat de impliciete aanwijzing in de voorafgaande vraag wordt herkend. Het gaat om de vraag hoe je op basis van de *quotes* bij het gokken op de uitkomst van een wedstrijd (de uitkeringen per euro wanneer je de uitslag goed voorspelt), kunt achterhalen hoe de bookmaker de verdeling van de weddenschappen inschat.
Het antwoordmodel vermeldt twee mogelijke aanpakken, sterk leunend op de opbouw van de opgave. Met wat meer aandacht voor stelsels vergelijkingen (ook met meer variabelen) in het programma zou dat wellicht een meer gekozen aanpak zijn. Hoewel de problematiek ook geschikt lijkt voor vragen op het gebied van *Lineair Programmeren*, ontbreekt dit onderwerp. In zekere zin ook maar goed, het examen zat vol genoeg.
Lineair Programmeren keert ook niet terug in het nieuwe A-programma. Enerzijds is dat jammer. Het onderwerp biedt tal van kansen tot modelleren, en kritisch kijken naar uitkomsten en modellen. Ook dwingt het eigenlijk tot een stapsgewijze aanpak, waarbij algebraïsche vaardigheden op een natuurlijk manier aan de orde komen. Anderzijds was ik niet altijd gelukkig met de vraagstukken die de laatste jaren gesteld werden. Er werd enerzijds erg veel voorgekauwd – om te voorkomen dat (te) veel leerlingen zouden vastlopen – terwijl anderzijds de grenzen van het onderwerp werden opgezocht met onder andere niet-lineaire niveaulijnen en een ongebruikelijk assenstelsel.

Slotopmerkingen

Bovenstaande kritiek neemt niet weg dat de A12-examens een duidelijk (E&M-) profiel laten zien, in overeenstemming met de rol binnen de ('oude') Tweede fase. In de nieuwe situatie wordt aan het vak wiskunde A (dat wellicht toch wiskunde AB had moeten heten) diverse eisen gesteld, niet alleen passend bij E&M, maar ook bij een NG-profiel.
Los daarvan zijn er een paar hardnekkige problemen te signaleren, die zichtbaar worden in de eindexamens (maar daar niet altijd ontstaan):

1. De wijze waarop wordt omgegaan met de (on)nauwkeurigheid van gegevens en antwoorden, of liever de manier waarop dit probleem in feite wordt genegeerd.
2. Onvoldoende helderheid over het verschil tussen discrete en continue variabelen en de gevolgen die dit heeft (o.a. voor het bepalen van een extreme waarde, of het oplossen van een ongelijkheid). Naar mijn idee zijn ten aanzien van dit punt formuleringen van examenopgaven voor verbetering vatbaar. Het pardoes verklaren dat een discrete stochast normaal verdeeld is, zorgt mijns inziens eerder voor verwarring dan dat het helderheid verschaft.
3. De ruimte die geboden wordt aan kandidaten om een vraag op een 'ongewenste' (naar het oordeel van de examenmakers, of naar het oordeel van correctoren) manier ogenschijnlijk correct op te lossen. Ik denk dat het in het algemeen bij een centraal examen onwenselijk is als antwoorden door wat proberen gevonden kunnen worden. In zo'n geval zegt een goed antwoord (ook zonder toelichting) iets meer over het niveau van de kandidaat. Bij situaties waarbij GR-gebruik minder gewenst is, ligt een vraagstelling voor de hand waarbij dit apparaat van minder nut is, zoals het gebruik van parameters. Dergelijk vraagstellingen vragen wel voldoende voorbereiding – en met name ook aanpassing van de syllabus.
4. De spanning tussen gewenste vraagstellingen (waarbij leerlingen zelf een aantal stappen moeten doen, en niet te veel wordt voorgekauwd) en de wens dat de resultaten niet al te slecht zijn. Niet zelden zijn 'aardige' vragen na een proefafname gesneuveld, en vervangen door een 'kleine-stapjes-aanpak'. Het lijkt me, ook gezien het voorbeeldkarakter van het centraal examen, zeer gewenst dat elk eindexamen tenminste een wat complexe vraag bevat. Uiteraard is het goed hierover *vooraf* enige duidelijkheid te verschaffen.
5. De druk om op het centraal examen enerzijds voldoende aandacht te besteden aan een aantal *algebraïsche vaardigheden* en anderzijds contexten op een integere manier te gebruiken. Het lijkt me het overwegen waard om het examen onder te verdelen. In het eerste deel zouden dan de gewenste algebraïsche vaardigheden centraal moeten staan, het tweede deel zou een soort mengvorm kunnen zijn waarvoor de huidige opzet model kan zijn, en het derde deel zou kunnen bestaan uit een onderdeel waarbij leerlingen vanuit de beschrijving van een situatie en een probleem, een grotere vrijheid hebben, qua aanpak, maar ook meer eisen ten aanzien van terugkoppeling naar de vraag: een beetje te vergelijken met de vragen van de Wiskunde A-lympiade.

Noten

[1] O.a. te bekijken (en te downloaden) via *www.nvvw.nl*, of *www.cito.nl* .
[2] De toegenomen aandacht voor differentiëren is een bewuste keuze, mede op basis van eerdere reacties van docenten. Zie in dit verband bijvoorbeeld *Euclides* 82(1); pag. 11.
[3] Een paar voorbeelden: 2002-7; 2003-5 t/m 8; 2008-16 (alle 1e tijdvak).
[4] Afgerond op 4 decimalen geeft de hypergeometrische verdeling 0,3364; de binomiale 0,3407 en de normale verdeling (met continuïteitscorrectie) 0,3284.
[5] Mogelijk ook door het gegeven dat de hypergeometrische verdeling niet in het examenprogramma voorkomt. In het verleden heeft dit echter niet zo'n rol gespeeld (zie bijv. 2002-II-6; 2004-II-5). En in de 'methodes' komt de hypergeometrische ook wel aan bod, impliciet of expliciet.
[6] Zie *Euclides* 2004(1); pag. 12.
[7] Het aandeel aardgas in 1980 was (afgerond op hele procenten) 20%, en in 2004 24 % (op basis van *Statistical Review of World Energy 2009*; via *www.bp.com*).
[8] Als we, zoals gebruikelijk, uitgaan van een mogelijke afwijking van 0,5 miljard naar boven of beneden praat je over een afwijking van 12,5% ten opzichte van de opgegeven waarde.
[9] Dit is niet de eerste keer. Zie bijvoorbeeld *Euclides* 2003(1); pag. 35.

Over de auteur

Gerard Koolstra is wiskundeleraar aan het St. Michaël College te Zaandam.
E-mailadres: *gerardk@xs4all.nl*

Het einde van een tijdperk

LAATSTE TOETSEN WISKUNDE B1 EN B12 MET K&S

[Rob van Oord]

Einde van een tijdperk

Begin mei 2009 heb ik de laatste lessen gegeven aan de laatste groep B-leerlingen die ook nog kansrekening en statistiek (K&S) in hun programma had. Vanaf volgend jaar alleen nog algebra, analyse en meetkunde voor deze leerlingen, want wiskunde D wordt op mijn school niet aangeboden.
Ik denk met enige weemoed terug aan de leuke lessen kansrekening met die B-leerlingen. In 4- en 5-vwo werd het fundament gelegd met telproblemen, kansbomen en het vaasmodel. Ik sloot de lessenserie altijd af met de les 'Minilotto', waarin leerlingen grove bedragen (wel € 0,10) konden inzetten voor 10 kansen op de hoofdprijs. Bij dit spel worden er 3 (winnende) balletjes getrokken uit 10. Na het spelen werd de experimentele kans op de hoofdprijs vergeleken met de theoretische kans van 1:120. Ook van de kansen op 2, 1 of 0 getallen goed. Vrijwel zeker zijn er een of meer leerlingen met de juiste 3 getallen, zodat er kan worden uitbetaald.
In 6-vwo werd het domein K&S afgerond met de normale verdeling en het onderwerp hypothese-toetsen.[1] De laatste toets hierover was in december 2008. Voor veel leerlingen de gelegenheid om hun cijfer op te vijzelen (gemiddelde score 8,0). Met een vraag 'Vlucht CCC161208', een variant op een door hen getrainde examenbundel-opgave (Vlucht TW378), en vragen over verwachtingswaarde en binomiale verdeling in 'Testen met proefpersonen', over normale verdeling in 'Koplampen' (examen 2007-I), over tellen en kansen in 'Krasbal' (examen 2007-I) en een binomiale toets en een hypothese-toets in 'Snelheidsovertreders' kwam het hele domein K&S aan bod.
Alle leerlingen hebben inmiddels examen gedaan. De opgave *Wachten op de bus* (examen 2009-I) bevatte twee vragen over kansen: één over de verwachtingswaarde (score 88%), en één waarbij de kansen eerst via de normale verdeling moesten worden berekend (score 93%). Voor de B1-leerlingen was er de som over de kans op een hand zonder honneurs bij Bridge. Dit leverde wel wat problemen op (score 37%) omdat de vraag nogal complex was. Het vaasmodel was van toepassing met 52 balletjes waarvan 32 rode en 20 witte. Zouden ze nog aan de les 'Minilotto' gedacht hebben? De meesten rekenden wel de kans op een zogenoemde *Yarborough* uit met: $\frac{32}{52}\cdot\frac{31}{51}\cdot\frac{30}{50}\cdot\ldots\cdot\frac{20}{40}$

Een toetsvraag uit 5-vwo over korfbal

Ik wil de lezer meenemen naar de toets die klas 5-vwo maakte in december 2007, en dan met name naar de vraag over korfbal. Ik werd (blij) verrast door een groot aantal verschillende oplossingen bij deze vraag. Het was net te laat om een artikel hierover geplaatst te krijgen in het themanummer van *Euclides* over Statistiek en Kansrekening (jaargang 83(4), februari 2008). Daarom ziet u het nu.
Bij mij op school is de groep leerlingen met wis-B1 en wis-B12 altijd een combiklas geweest en dat was interessant vanwege de verscheidenheid aan oplossingsstrategieën die je tegenkomt bij zo'n gemengde B-groep.



Een inzichtvraag met diverse oplossingsstrategieën

Vraag 3a: verdeling over de vakken
De opgave:

> **3 – Korfbal**
> Een korfbalteam bestaat uit 4 jongens en 4 meisjes. Deze 8 spelers zijn verdeeld over twee vakken, het aanvalsvak en het verdedigingsvak. In elk vak horen 2 jongens en 2 meisjes.
> De coach heeft de beschikking over 4 jongens en 6 meisjes waaruit hij het team moet samenstellen en verdelen over de 2 vakken. De coach houdt geen rekening met aanvallende of verdedigende spelers. Ga er vanuit dat hij dit keer volkomen willekeurig de indeling maakt.
> **3a** – Op hoeveel verschillende manieren kan hij de 4 jongens over de 2 vakken verdelen?

Van de B12-leerlingen hadden Bojan, Jantina, Annelies, Xander, Mark, Dries, Ilse, Erwin, Sven en Wendy allemaal als antwoord op vraag 3a: $\binom{4}{2}=6$

- Robin had:
$4!=24 \quad \frac{24}{2\cdot 2}=6$ (*dubbele eruit halen*)

- Alexander deed het zo:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{matrix} \quad 6 \textit{ manieren}$$

- Henri had:

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{matrix}\right\} \binom{4}{2}=6$$

- Casper had:

$$\begin{matrix} JP \mid KH \\ JK \mid PH \end{matrix} \quad \binom{4}{2}=6$$

- Deepak schreef:

$Op \binom{4}{2} = 6$ *manieren per vak, dus* $6 \cdot 2 = 12$ *manieren*

En dat is fout.

- Dirk had het nog niet geleerd en antwoordde:

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

En dat is ook fout.

Van de B1-leerlingen hadden Femke, Agnes, Linda, Thomas, Bas, Ralph, Tessa K, Tessa V en Ilonca het goede antwoord.

- De uitleg van Agnes was:

PJ	*BH*	*Stel de jongens zijn PJBH, dan kunnen ze op 6*
PB	*JH*	*manieren (als je niet kijkt naar functie).*
PH	*BJ*	*De andere 2 jongens die niet in het enen vak*
JB	*PH*	*zitten moeten wel in het andere vak.*
JH	*BP*	*Ook bij hun maakt het niet uit hoe ze staan.*
B~~X~~H	*JP*	*6 manieren dus.*

- Uitleg van Ralph:

$\binom{4}{2}\binom{2}{2} =$ ~~36~~ 6

- Tessa V heeft ook een dergelijke uitleg.

- Ilonca deed:

$\binom{4}{2} = 6$ *manieren*

AB CD

AC BD $\times 2 = 6$

AD BC

Na een eerste impuls nog even een uitgebreidere manier ter controle.

- Ward had:

ab cd

ac db

ad bc $\times 2$ *omdat*

bc Ad 2 *vakken* $= 12$

bd Ac

cD AB

- Martijn, Annemieke deden ook:

$\binom{4}{2} = 6$ *dus* 6×2 *voor beide vakken*

- Wianka had het eerst goed, en streepte dat toen door

4 *J over* 2 *vakken*

~~$\binom{4}{2} = 6$ *manieren*~~

~~$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ *manieren*~~

Ze maakte ervan:

*V*1	*V*2
4×3	2×1

- Johan:

4 0   4 0

3 1   1 3   5 *manieren*   (*of* 12 *als je de jongens afzonderlijk bekijkt*)

2 2   / /

- Fleur komt ook uit op 12:

1   2

JO   *NG* $6 + 6 + 6 + 6 = 24 / 2 = 12$

~~$4! = 24$ *op 24 manieren*~~   ↑ *de dubbele*!

want $JO = OJ$, *dus*

$4! = 24 / 2 = 12$ *manieren*

Zelfs op twee manieren fout!

Kortom, van de B12-leerlingen waren er 14 goed en 2 fout, en van de B1-leerlingen 9 goed en 6 fout.

Vraag 3b: Kim en Joke willen bij elkaar in één vak

Het vervolg van de opgave:

> Kim en Joke zijn vriendinnen; zij behoren tot de 6 meisjes van dit team.
> **3b** – Bereken de kans dat zij door de coach in het zelfde vak worden opgesteld.
> Bedenk van te voren met welk (vaas-)model je de willekeurige keuze van de coach kunt nabootsen.

Van de B12-leerlingen vulden 2 niets in, 8 hadden een fout antwoord en 6 een goed antwoord.

Van de B1-leerlingen vulde er 1 niets in, 9 hadden een fout antwoord en 5 een goed antwoord.

Het gaat vooral om de verschillende aanpak die ik tegenkwam bij het zoeken naar het juiste antwoord waardoor ik getroffen werd.

- Deepak neemt het vaasmodel letterlijk en tekent een vaas met zes balletjes waarvan twee zwart:

$P(zz) = \frac{2}{6} . \frac{1}{5} = 0{,}067$

Er zijn twee vakken, dus de kans is $2 . \frac{2}{6} . \frac{1}{5} = 0{,}133$

- Bojan (in 6-vwo van B12 naar B1 overgestapt) neemt ook het vaasmodel:

Kim en Joke zijn bijv. rode knikkers / De andere meisjes zijn dan witte knikkers

De kans dat ze in één vak bij elkaar zitten is:

Kim   *Joke*

2/6 · 1/5 = 0,0667

Ze zitten ook bij elkaar als ze als 3e *&* 4e *worden gekozen:*

Kim   *Joke*

4/5 · 3/5 · 2/4 · 1/3 = 0,0667

En als ze als laatste 2 *worden gekozen ook:*

4/6 · 3/5 · 2/4 · 1/3 · 2/2 · 1/1 = 0,0667 [* ; RvO]

De kans dat ze dan bij elkaar zitten is:

0,0667 + 0,0667 + 0,0667 = 0,2

En hier (bij *) zit de fout ! Ze zitten nu niet in een vak, maar zijn reserve.

- Dries (ook in 6-vwo naar B1 overgestapt) doet het iets korter, en correct:

$\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = 0{,}0667 =$ *kans dat ze samen in vak A staan*

$\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = 0{,}0667 =$ *kans dat ze samen in vak B staan*

$0{,}0667 \times 2 = 0{,}1333$

- Dit komt op hetzelfde neer als wat Erwin schrijft:

De kans dat Kim en Joke in hetzelfde vak komen is $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Ze kunnen zowel in het aanval als in het verdedigingsvak staan, dus je vermenigvuldigd met $2 : \frac{1}{15} \cdot 2 = \frac{2}{15}$

- Annelies redeneert als volgt:

eerst 4 uit 6 kiezen $\quad$ *kans* $=\frac{4}{6}$ $\quad$ [? ; RvO]
4 m verdelen over 2 velden is 6 manieren
kans $=\frac{1}{6}$ *dat Kim en Joke in één team zitten*

Ze had moeten berekenen dat hier 15 mogelijke viertallen voor zijn; in zes van die viertallen komen beide meisjes voor; hiervoor zijn 6 mogelijkheden, waarvan er twee zijn waarbij beide meisjes in hetzelfde vak komen.

De juiste kans had zo gevonden kunnen worden: $\frac{6}{15}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{15}=0{,}1333$.

- Mark volgt een, zoals ik het vaak noem, oude 'havo-manier':

1 (*want ieder vak kan nog*) $\cdot\ \frac{2}{5}$ (*de kans dat de een bij de ander komt*)
$=\frac{2}{5}$ (*kans dat ze bij elkaar komen*)

Het model is fout want ze kunnen ook *niet* gekozen worden. Toch kun je er volgens deze methode ook uit komen. Dat zou dan als volgt gaan: de kans dat één van de meisjes in één van de vakken wordt gekozen is $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, want voor vak A, vak B en niet gekozen worden, worden telkens twee meisjes geloot, dus drie even grote kansen.

De kans dat dan het tweede meisje in hetzelfde 'vak' gekozen wordt is dan $\frac{1}{5}$; dus de kans is $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$.

- Xander volgt een manier waaruit niet duidelijk wordt wat hij bedoelt met de indeling:

Joke $\quad$ *N* $\quad \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}$
N $\quad$ *Joke* $\quad \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}$
Kim $\quad$ *N* $\quad \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}$
N $\quad$ *Kim* $\quad \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}$
Kim $\quad$ *Joke* $\quad \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}$
Joke $\quad$ *Kim* $\quad \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}$ $\Big\}\Rightarrow \frac{1}{15}$ *kans dat ze bij elkaar komen*

Wat bedoelt hij met de kolommen? Het lijkt er op dat hij de kans heeft uitgerekend dat Joke en Kim samen in één vak worden gekozen. Dan moet hij nog 'keer 2' doen.

- Alexander gooit het over een andere boeg:

$\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=0{,}067$ $\quad$ *kans dat ze bij elkaar komen in groep* 1
$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=0{,}166$ $\quad$ *kans dat bij elkaar komen in groep* 2
_____ +
$0{,}2333\approx 23\%$

Waarschijnlijk maakt hij de denkfout dat na de kans dat beide meisjes in vak 1 geloot worden, dan voor vak twee nog maar vier plaatsen over zijn, en niet weer dezelfde kans als voor vak 1. Hij gebruikt een verkeerd model, maar hoe leg je dat uit? Je moet dan zeggen dat er eerst twee andere in vak 1 geloot worden en dan de meisjes in vak 2: die kans is dan

$\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2\ (\textit{de meisjes})}{4\ \ (\textit{vak 2})}\times\frac{1}{3}$.

- Robin probeert het via aantal mogelijkheden tellen:

.. *mogelijkheden* : $\frac{6!}{2\cdot 3}=120$
.. *samen in veld* : 2 $\quad \frac{2}{120}=\frac{1}{60}$

Onduidelijk welke mogelijkheden hij telt. Zijn dit alle mogelijkheden van 3 groepen van twee meisjes?

Dat zouden er $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}=15\cdot 6=90$ zijn voor vak 1, dan vak 2, en op de bank. Hiervan zijn er $1\cdot\binom{4}{2}+\binom{4}{2}\cdot 1=6+6=12$ met JK in hetzelfde vak.

Denk aan een boomdiagram met eerst 15 tweetallen; daarvan is er eentje JK, maar in de boom volgen er nog 6 takken achter. Verder wordt bij alle tweetallen zonder J en/of K, 6 stuks, een van de 6 volgende takken JK. Er zit dus wel wat in deze manier van oplossen.

- Henri zegt dit op de volgende manier:

Voor vak 1 *zijn er voor de meisjes* 15 *mogelijkheden*
Bij 1 *mogelijkheid zitten ze bij elkaar*
Bij vak 2 *zijn er ook* 15 *mogelijkheden, waarvan* 1 *voor hun*
Dus de kans is $\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$

- Dirk kiest een geheel andere aanpak:

De kans dat ze alle twee in het veld komen is
$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$
De kans de Kim in vak 1 *komt is dan* $\frac{1}{2}$
De kans dat J ook in vak 1 *komt is* $\frac{1}{3}$
Dus de kans op samen in vak 1
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}=0{,}074$

Datzelfde voor samen in vak 2 *geeft* 0,148

Deze kans zou $\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}$ moeten zijn, dan gaat het goed. Hij kijkt waarschijnlijk naar vak A, vak B en Niet, dus $\frac{2}{3}$ kans, en niet naar de personen waarvan er vier een lootje treken met 'veld' , en twee met 'Niet spelen'.

- Wendy (nu ook naar B1, vanwege loting bij geneeskunde, net als Jantina) heeft ook deze aanpak:

De kans dat ze beide voor het team gekozen worden $\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=0{,}4$
De kans dat ze beide in hetzelfde vak komen
$\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}\cdot 0{,}4=\frac{1}{15}=0{,}067$ *kans*

Ze vergeet dat deze kans voor elk van beide vakken geldt.

- Casper heeft dit beter door:

2 meisjes aanval, 2 verdedigen, 2 ernaast
Eerst moeten allebei de meisjes gekozen worden in het team
$P=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=0{,}4$
Er zijn maar 2 van de 6 verdelingen dat ze allebei in hetzelfde vak staan (allebei aanval, of allebei verdedigen): $0{,}4\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{15}$ *kans*

- Ilse (ook inmiddels naar B1 geswitcht) zegt het kort en bondig:

Zonder teruglegging : $\underset{\textit{vak}\uparrow 1}{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}}+\underset{\textit{vak}\uparrow 2}{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}}=0{,}133=\frac{2}{15}$

Bij de B1-leerlingen komen ook de hierboven geschetste manieren van aanpak naar voren.

Fleur, Tessa K, Tessa V, Femke en Agnes kiezen de balletjes. Deze worden ook getekend. Fleur komt er uit. Annemieke, Martijn en Linda gaan uit van het aantal teams (15 verschillende). Martijn vindt het juiste antwoord. Thomas en Ralph rekenen via de vakken en komen goed uit. Bas, Johan, Ilonca en Wianka lopen vast. Er wordt wat getekend, lijsten met tweetallen letters worden gemaakt, of zomaar wat kansen opgeschreven die niet zijn te achterhalen.

Kortom, een som om nooit te vergeten.

Noot

[1] Op mijn school gebruiken we *Moderne wiskunde* (8e editie) B1 deel 1 en deel 2.

Over de auteur

Rob van Oord is docent op het Coenecoop College te Waddinxveen.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Pythagoras wordt vijftig!

[Willem van Ravenstein]

Over niet al te lange tijd viert *Pythagoras*, het *wiskundetijdschrift voor jongeren*, zijn vijftigste verjaardag. Eigenlijk zijn *Pythagoras* en ik zo'n beetje even oud. Als docent wiskunde kreeg ik van mijn werkgever zo rond mijn vijftigste verjaardag allerlei e-mails om vooral de cursus 'vitaal leraarschap' te gaan doen, want, zo lijkt het, als ik nog iets van mijn carrière wil maken, zal er toch nog iets moeten gebeuren. Ik heb daar nog geen behoefte aan, maar kennelijk is zo'n mooi rond getal als 50 aanleiding om na te gaan denken over je carrière. Eerlijk gezegd denk ik dat het tijdschrift veel langer mee moet dan ondergetekende, dus kunnen we beter kijken hoe het gaat met het wiskundetijdschrift.
Bovendien is zo'n mijlpaal, want zo mag je dat toch wel noemen, een mooie aanleiding voor een feestje. Op de website van het tijdschrift staat:
'*Pythagoras, het wiskundetijdschrift voor jongeren, laat al bijna een halve eeuw de uitdagende kanten van wiskunde zien, wiskunde die in de schoolboeken niet of nauwelijks aan de orde komt.*'
Speelt het tijdschrift een rol in het wiskundeonderwijs? Gebruiken docenten *Pythagoras* om de lessen uitdagender te maken? Heeft zo'n tijdschrift in deze moderne tijd van 'digitale kennisrevolutie' nog wel zin?
Als wiskundedocent heb ik tijdens mijn loopbaan allerlei opdrachten verzameld waarvan mij niet helemaal duidelijk (meer) is waar ze precies vandaan kwamen. Het gaat daarbij om 'onmogelijke figuren', 'de hoogte meten van een toren' en nog een aantal andere leuke lessen en ideeën. Ik ben er inmiddels achter gekomen dat vrijwel al die ideeën 'gewoon' uit *Pythagoras* komen. Waar zouden ze anders vandaan moeten komen? Maar belangrijker is de vraag: welke ideeën zijn er in die 48 jaargangen dan nog meer te vinden?

Geometrisch kwadrant

Niet zo lang geleden kwam ik op *WisFaq* (*www.wisfaq.nl*) een vraag tegen over het 'geometrisch kwadrant'. Op Internet is er wel 'iets' over te vinden maar helemaal 'helder' is dat allemaal niet. Maar zoiets staat natuurlijk gewoon in *Pythagoras*; ***zie figuur 1***.



figuur 1

> *Geometrisch kwadrant*
> Als je zelf hoogten wilt gaan meten van gebouwen of bomen in je omgeving, kun je dat vaak handig doen met een instrument dat daar vroeger eeuwenlang voor in gebruik geweest is, maar nu in de vergetelheid is geraakt. De kwadrant blijkt zo vernuftig te zijn, dat de uiteindelijk berekening beperkt blijft tot één vermenigvuldiging en één deling.
> Hoe maak je zelf een kwadrant en hoe moet je er mee werken?
>
> Bron: Pythagoras, maart 1991, jaargang 30, nummer 2

Dat is toch wel bijzonder. Zo'n artikel uit 1991 blijkt in opeens heel erg bruikbaar voor een 'praktische opdracht' en het is zondermeer bruikbaar als aanleiding voor een 'probleemgestuurde opdracht over hoogtemeting', inclusief 'een doe-activiteit' en 'een buiten-activiteit'. Verrassend genoeg, ook bij *Ratio – interactief en uitdagend wiskundeonderwijs* kan je, on line, in 'paragraaf 14.4 onderzoek' lezen[1]:

'Dit onderzoek is een bewerking van het artikel *Hoogten meten met een geometrisch kwadrant* uit het tijdschrift *Pythagoras, jaargang 21, nr 2* van november 1982. Misschien is dat nog te vinden in de schoolbibliotheek.'

Kennelijk is *Pythagoras* zowel voor 'degelijk en doorwrocht' als voor 'het nieuwe leren' een bron van informatie en inspiratie.
Als docent kan je veel inspiratie op doen in de 48 jaargangen *Pythagoras*. Het lijkt me duidelijk dat een bron die op deze manier de 'waan van de dag' overstijgt, wel bijzonder waardevol moet zijn.
Het plan is om binnen nu en een jaar alle oude nummers van *Pythagoras* 'on line' te hebben staan. De bestanden zouden dan voor iedereen vrij toegankelijk moeten zijn. De nieuwe nummers worden na een jaar ook in het digitale archief opgenomen.
Ik zou daar heel blij mee zijn en ik denk dat zo'n archief een mooie bron is van informatie, uitdagende wiskunde en allerlei ideeën voor docenten en leerlingen.
Op de lerarenopleiding wiskunde proberen we studenten te bewegen een abonnement op *Pythagoras* te nemen. Er valt veel zeggen over de lerarenopleiding, van vakkennis tot competenties, maar een student van de lerarenopleiding wiskunde zonder een abonnement op *Pythagoras*? Eigenlijk kan dat niet, maar hetzelfde geldt natuurlijk ook voor wiskundedocenten. Zo'n beroeps-register is natuurlijk wel een grappig idee, maar je kunt beter kijken of zo'n docent wel een abonnement op de *Pythagoras* heeft…☺

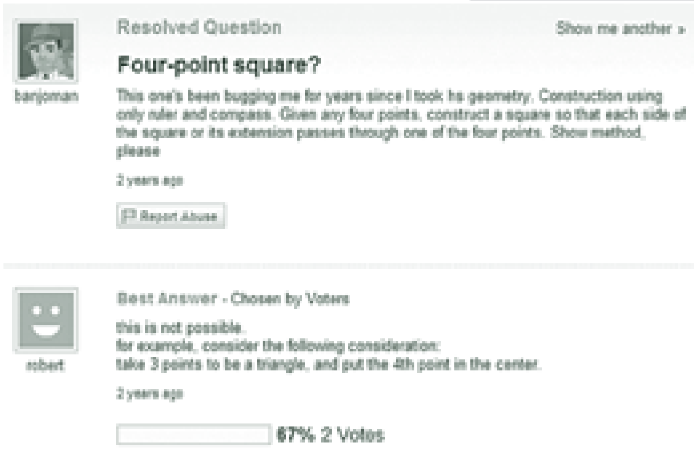
Wat is wiskunde?

Maar, alle gekheid op een stokje, *Pythagoras* is helemaal niet bedoeld om docenten op ideeën te brengen. Het doel is om jonge mensen kennis te laten maken met de wiskunde. Je zou je af moeten vragen of dat dan nodig is? Ik denk het wel en in toenemende mate. De meeste schoolboeken geven, op de keper beschouwd, toch wel een 'heel vreemd beeld' van wat wiskunde is. Dat is bijzonder jammer en het zou zo niet moeten zijn… Ik kom daar vast nog wel een keer op terug.
Voor wat betreft de 'digitale kennisrevolutie' ben ik ook niet al te optimistisch. De uitdaging van de komende jaren wordt leerlingen en studenten te leren informatie

te kunnen beoordelen op betrouwbaarheid. Er is van alles te vinden op dat 'grote internet', maar klopt het wel altijd? Onderstaand voorbeeld zou wel eens een blik in de toekomst kunnen zijn. We weten het allemaal niet zo precies, maar we gaan er gewoon over stemmen, een soort van 'democratische wiskunde' zullen we maar zeggen; ***zie daarvoor nu figuur 2***.
Nu zijn het nog wat weinig stemmen, maar de meerderheid (2 van de 3) vindt dat het niet kan, dus kan het niet.
In zo'n wereld van onzekerheden zijn betrouwbare bronnen van groot belang. Ik durf wel te voorspellen dat de wiskunde zich in de nabije toekomst om deze reden zal mogen verheugen in een groeiende belangstelling. Zo'n tijdschrift met zijn digitale archief als *Pythagoras* lijkt me dan een mooi middelpunt.

Schoolwiskunde

Je zou kunnen zeggen dat er ten aanzien van de schoolwiskunde een aantal



figuur 2

ontwikkelingen zijn die, hoe je het ook went of keert, niet altijd tot een heel groot enthousiasme voor het vak lijken te leiden. Gelukkig zijn er veel wiskundedocenten die hun leerlingen ook kennis willen laten maken met de uitdagende en leuke kanten van de wiskunde. Het *wiskundetijdschrift voor jongeren* probeert daar al bijna 50 jaar aan bij te dragen en ik hoop dat ze dat nog heel lang blijft doen.
Er zijn allerlei plannen om het feestje rond de vijftigste verjaardag van *Pythagoras* nog leuker te maken. Ik ben heel benieuwd.

Noot

[1] Zie: *www.ratio.ru.nl/testdir/lesmateriaal/gelijkvormigheid/index.html*
Dit is een deel van: *www.ratio.ru.nl/index.php?content=lesmateriaal*

Over de auteur

Willem van Ravenstein is wiskundedocent aan het Instituut voor Lerarenopleidingen van de Hogeschool Rotterdam en drijvende kracht achter *WisFaq*, de digitale vraagbaak voor wiskunde en wiskundeonderwijs (*www.wisfaq.nl*).
E-mailadres: *w.van.ravenstein@hro.nl*
Zie ook: *www.wiswijzer.nl*

Vanuit de oude doos

A$^{\underline{o}}$ 1932

[Ton Lecluse]

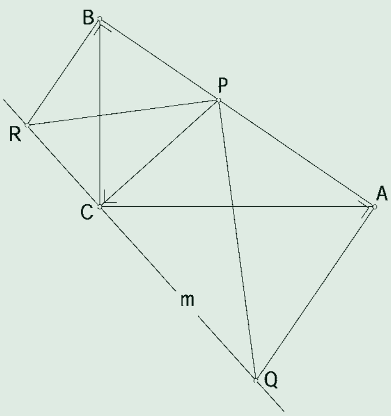
Ton Lecluse is docent wiskunde en heeft een doos met oude schoolboeken uit de vorige eeuw, waar hij graag in neust. Hij vindt vaak mooie opgaven (zonder uitwerking gelukkig) die hem uitdagen een oplossing te zoeken die past in het huidige curriculum. In de rubriek 'Vanuit de oude doos' wordt in elke aflevering een juweeltje behandeld. U kunt er uw lessen mee verrijken!

Dubbele oppervlakte

Naar aanleiding van een toelatingsexamen wiskunde tot de universiteiten in 1932:

Op de schuine zijde AB van een ongelijkbenige rechthoekige driehoek ABC neemt men willekeurig een punt P. Door C trekt men een lijn $m \perp CP$; deze lijn m wordt door de loodlijnen, in A en B op AB opgericht, in de punten Q en R gesneden.
Bewijs, dat $\Delta PQR \sim \Delta CAB$ is, en daarna, dat oppervlak $\Delta PQR = 2 \cdot opp.\Delta ABC$ is, als $\angle AQC = 45°$.

Je wordt eerst uitgedaagd een tekening te construeren die aan de gegevens voldoet. (Dan pas onder de streep spieken!). Wellicht helpt het dit model te tekenen met een dynamisch computerprogramma.

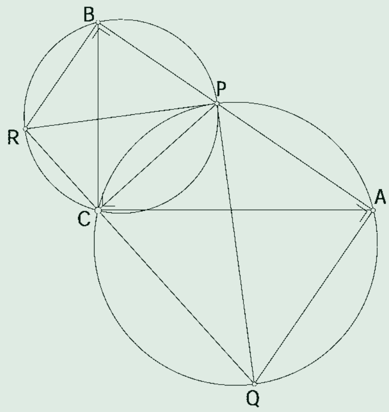


Kort gezegd: $\angle ACB = \angle PAQ = \angle PBR = \angle QCP = 90°$.
Vraag 1 – Bewijs: $\Delta PQR \sim \Delta CAB$.
Vraag 2 – Bewijs: als $\angle AQC = 45°$, dan is: $opp(\Delta PQR) = 2 \cdot opp(\Delta ABC)$
Hoe nu verder? Niet verder lezen, eerst zelf proberen!

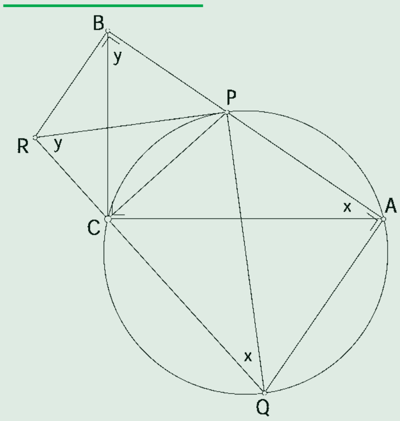
Er zijn twee koordenvierhoeken in de figuur aanwezig:

- $\angle QAP = \angle QCP = 90°$, dus $AQCP$ is een koordenvierhoek;
- $\angle RBP = \angle RCP = 90°$, dus $BRCP$ is een koordenvierhoek.

Kun je hier wat mee? Wellicht kun je een cirkel tekenen om zo'n koordenvierhoek.



En, je kunt proberen omtrekshoeken te gebruiken. Hoe nu verder? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

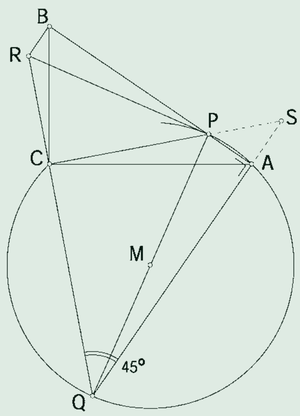


In de cirkel om $APCQ$ geldt:
$\angle PAC$ (= $\angle BAC$) = $\angle PQC$ (= x); ze staan beide op boog PC.
In de cirkel om $BPCR$ geldt:
$\angle PBC$ (= $\angle ABC$) = $\angle PRC$ (= y); ze staan beide op boog PC.

De driehoeken ABC en PQR hebben dus twee hoeken (x en y) gemeen, en zijn dus gelijkvormig.

Opmerking. Vraag 1 kan ook worden vervangen door 'Bewijs: $\angle RPQ = 90°$'.

Voordat de tweede vraag kan worden beantwoord, moet de tekening worden aangepast.

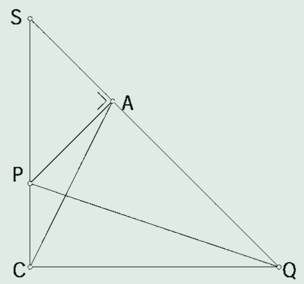


Hoe kan, vanuit de rechthoekige driehoek ABC, de tekening worden geconstrueerd met alle oorspronkelijke gegevens, aangevuld met $\angle AQC = 45°$?
Ik heb het gedaan door op de middelloodlijn van AC het punt M te zoeken met $\angle AMC = 90°$, en dan de cirkel door A te tekenen met middelpunt M. Het deel van deze cirkel onder de lijn AC is de meetkundige plaats van alle punten Q met $\angle AQC = ½\angle AMC = 45°$ (de omtrekshoek is de helft van de erbij behorende middelpuntshoek).
De cirkel snijdt AB ook in P. De loodlijn in A op AB snijdt de cirkel in Q. Daarna kan QC worden getrokken evenals BR, PR en PQ.

We moeten aantonen dat:
$opp(\Delta PQR) = 2 \cdot opp(\Delta ABC)$
Er zijn veel mogelijkheden om naar oppervlakte toe te werken. Hoe nu verder? Niet verder lezen, eerst zelf proberen.

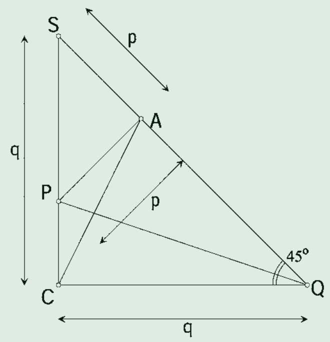
We gaan werken met de bekende regel dat bij gelijkvormige objecten de verhouding *zijde : oppervlakte* gelijk is aan $a : a^2$.
Bijvoorbeeld: $PQ = \sqrt{2} \cdot AC$.
Niet verder lezen, eerst zelf proberen dit te bewijzen.

De keuze hierboven is niet willekeurig! De lijnstukken *AC* en *PQ* zijn de diagonalen van koordenvierhoek *APCQ*. Vraag 2 kunnen we nu als volgt herformuleren (met *S* als snijpunt van *QA* en *CP*):



In het halve vierkant CQS wordt vanuit een willekeurig punt A dat op de schuine zijde QS ligt, een loodlijn getrokken op QS, die CS snijdt in P.
Bewijs dat PQ = $\sqrt{2} \cdot$ AC.

Niet verder lezen, eerst zelf proberen.



Stel $CQ = CS = q$ en $PA = SA = p$. De cosinusregel in driehoek *CAS* geeft:

$$AC^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cdot \cos 45$$
$$= p^2 + q^2 - \sqrt{2} \cdot pq$$

De stelling van Pythagoras in driehoek *CQP* (of in *AQP*) geeft:

$$PQ^2 = (q - p\sqrt{2})^2 + q^2$$

Op elkaar delen geeft:

$$\frac{PQ^2}{AC^2} = \frac{(p\sqrt{2} - q)^2 + q^2}{p^2 + q^2 - \sqrt{2} \cdot pq}$$

Met eenvoudige algebra kan worden ingezien dat de teller inderdaad het dubbele van de noemer is.
Hiermee is ook de tweede vraag van de opgave beantwoord.

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatings-examens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Comenius College te Hilversum.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

Aankondiging / E-klas Training Wiskunde D

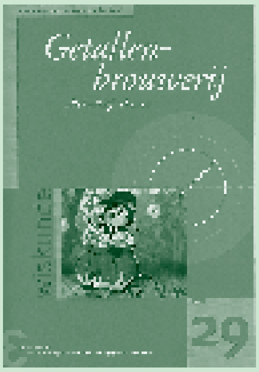
In de regio Amsterdam en omstreken bieden veel vo-scholen het vak wiskunde D aan (of willen het aanbieden). Vanuit de ITS Academy wordt dit vak ondersteund, door onder andere het ontwikkelen van e-klassen.
Op **donderdag 8 oktober 2009** willen wij bij elkaar komen voor een e-klas training. De training bestaat uit een overzicht van de ontwikkelde e-klassen, de uitwisseling van ervaringen en workshops (beginners en gevorderden).
Locatie: Amstel Instituut
Adres: Science Park 904, Amsterdam
Website: *http://wiskunded.itsacademy.nl/* (kies dan, in het menu links, voor 'Activiteiten')
Zie ook: *www.e-klassen.nl*
Organisatie: ITS Academy en Amstel Instituut (UvA)

Mededeling / Hulp bij rekenvaardigheid

Algecadabra is een nieuw computerprogramma om de rekenvaardigheid van leerlingen te vergroten – en dat zonder gebruik van de rekenmachine.
Het programma kan door leerlingen gebruikt worden, maar ondersteunt daarnaast ook de leraar die een digitaal bord beschikbaar heeft. Die kan met het programma voorbeelden op het digitale bord genereren en toelichten.
De betaversie is nu gratis te downloaden (via *www.algecadabra.nl*)!

Bron: Nieuwsbericht Wiskunde Persdienst / 27 mei 2009

Verschenen / ε Getallenbrouwerij (Zebra 29)



Auteurs: Arnoud van Rooij, Leon van den Broek
Ondertitel: Alternatief rekenen
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2009)
ISBN: 9 789050 411059
Prijs: € 9,00 (voor NVvW-leden op bijeenkomsten: € 7,00); 60 pagina's

Van de achterkant – Bij het rekenen met 'gewone' getallen, zoals gehelen, breuken, wortels of decimalen, gebruik je allerlei rekenregels waar je meestal niet bij stilstaat. Maar wat gebeurt er als je bijvoorbeeld de getallen van de klok gaat optellen of vermenigvuldigen?
In deze Zebra maak je kennis met een aantal 'alternatieve' getalverzamelingen, waaronder de complexe getallen. Bij het construeren van nieuwe getalverzamelingen is het de kunst een samenhangend geheel te maken, waarin je kunt rekenen met regels die je gewend bent. Door deze getallenbrouwerij ga je de 'gewone' getallen en rekenregels beter begrijpen, en waarderen. Natuurlijk staat het boekje vol opgaven en eindigt het met een aantal uitdagende opdrachten.

Uitgave in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verschenen / ε Passen en Meten met Cirkels (Zebra 30)



Auteur: Floor van Lamoen
Ondertitel: De arbelos van Archimedes
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2009)
ISBN: 9 789050 411066
Prijs: € 9,00 (voor NVvW-leden op bijeenkomsten: € 7,00); 57 pagina's

Van de achterkant – Pythagoras, Euclides en Archimedes zijn bekende figuren die zich in de Griekse oudheid bezig hielden met vlakke meetkunde. Deze klassieke meetkunde is nu eeuwenoud, maar fascineert nog steeds velen en wordt vaak 'mooi' gevonden.
Eén van de figuren die in de klassieke Griekse meetkunde werd bestudeerd, is het schoenmakersmes of de arbelos, gevormd door drie verschillende halve cirkels.
De arbelos wordt in deze Zebra benaderd met verschillende wiskundige gereedschappen: meetkundige redenering, berekeningen, coördinaten en inversie.
De opgaven tussendoor ondersteunen de theorie. De afsluitende opdrachten achterin dagen je uit om zelf te passen en te meten met cirkels.

Uitgave in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verschenen / Het Bisemisspel



Ondertitel: Meer dan honderd puzzels
Auteur: Paulus Gerdes
Uitgever: Lulu *(www.lulu.com)*
Prijs: € 7,93 (96 pagina's)
Te bestellen via: *http://stores.lulu.com/pgerdes*

Van de omslag (door Greet Van Keymeulen, lector wiskunde, Arteveldehogeschool, Gent) – Toen het 'bisosspel' van Paulus Gerdes werd gepubliceerd, keken we meteen uit naar de vertaling van het volgende boekje want wie van puzzelen houdt, krijgt er nooit genoeg van. De puzzelstukjes of bouwstenen van intelligente raadsels zijn vaak zuivere geometrische figuren. Het 'bisemisspel' dat Paulus Gerdes in dit boekje beschrijft heeft 'de halve dominosteen of de rechthoekige driehoek' als grondstructuur. Door het steeds weer anders combineren van deze 'semis' ontstaan nieuwe puzzelstukjes, die bi-semis worden genoemd. Paulus Gerdes geeft zijn geheimen prijs in het eerste hoofdstuk waardoor kinderen hun puzzelstukjes zelf kunnen uittekenen en construeren.
Het 'bisemisspel' is een legpuzzel waarbij figuren worden nagelegd. Door aanvullen, verschuiven, draaien, spiegelen of omklappen worden steeds nieuwe en vaak complexe figuren gemaakt. Sommigen daarvan krijgen speelse namen: tent, draaitol, pop, …
Bij het analyseren en samenstellen van deze puzzels moeten kinderen nauwgezet waarnemen waardoor ze gaan letten op essentiële eigenschappen van verschillende meetkundige figuren zoals: het parallellogram, het trapezium, de vijfhoek en de zeshoek. De begrippen convex, symmetrie, draaisymmetrie of een combinatie ervan staan in dit puzzelboekje centraal.
Het 'bisemisspel' is een evoluerende puzzel. We kunnen hem spelen op vrij jonge leeftijd door het aantal puzzelstukken nodig bij het spel te beperken. Het boekje is gradueel opgebouwd: eerst wordt gewerkt met 2 bisemis, daarna met 3 … om te eindigen bij 12. Hoe meer bisemis bij het spel betrokken worden, hoe groter de moeilijkheidsgraad is.

Verschenen / De Indische Klerk



Auteur: David Leavitt
Oorspronkelijke titel: The Indian Clerk
Uitgever: De Harmonie, Amsterdam
ISBN 978 90 6169 899 9
Prijs: € 24,95 (587 pagina's)

Van de achterflap – Het is januari 1913. De charismatische en excentrieke wiskundige G.H. Hardy treft een mysterieuze envelop aan. Hij vindt hierin een brief van een Indische klerk, Srinivasa Ramanujan, die beweert op het punt te staan een revolutionaire ontdekking te doen. De collega's van Hardy geloven niet dat Ramanujan een genie is, maar Hardy besluit de klerk serieus te nemen en laat hem uit India overkomen. Deze keuze zal niet alleen zijn eigen leven en dat van zijn vrienden veranderen, maar de hele geschiedenis van de wiskunde.
In 'Bronnen en dankbetuiging' achterin het boek, schrijft Leavitt o.a.:
Bij de research voor en het schrijven van *De Indische klerk* heb ik honderden bronnen geraadpleegd, en ik ben veel dank verschuldigd aan de vele historici, archivarissen, wiskundigen en bibliothecarissen die deze bronnen met hun noeste arbeid aan het licht hebben gebracht. Deze roman is gebaseerd op ware gebeurtenissen maar wijkt tegelijk af van de historische werkelijkheid, zoals de meeste romans gebaseerd op ware gebeurtenissen: feiten worden met fictie vermengd en historische figuren tot fictieve personages getransformeerd.

Verschenen / Elegance with Substance



Ondertitel: Mathematics and its education designed for Ladies and Gentlemen
Uitgever: Dutch University Press, 2009
Auteur: Thomas Colignatus
Prijs: € 14,95 (112 pagina's)
Zie verder: *www.dataweb.nl/~cool/Papers/Math/Index.html*

Volgens de auteur, econometrist en leraar wiskunde, faalt internationaal gezien het onderwijs in wiskunde en zijn de economische gevolgen daarvan groot. Zijns inziens zit de ontwikkeling van het onderwijs vast en hij adviseert de landsparlementen dit te onderzoeken. De auteur betoogt dat wiskundigen vooral worden opgeleid in abstract denken - in tegenstelling tot de manier van denken in de empirische wetenschappen - terwijl leerlingen in de klas toch wel degelijk een werkelijkheid vormen. Wat 'wiskunde' heet te zijn is volgens hem vaak onhandig en onlogisch. Hij vindt dat leerlingen onnodig worden gekweld en dat hen goed wiskundig inzicht wordt onthouden.
In zijn boek geeft de auteur een twintigtal suggesties en voorbeelden waarmee de wiskunde of didactiek verbeterd kan worden. Zijn vier verbeteringen ten aanzien van de wiskunde zelf hebben betrekking op logica, theorie van verkiezingen, goniometrie, en de afgeleide. Het allergrootste probleem vormt zijns inziens de computer algebra. Ten slotte doet hij de aanbeveling aan ieder land om een nationaal instituut voor wiskunde op te richten; een instituut met een bestuursvorm die open is naar de diverse geledingen in de samenleving ter voorkoming van navelstaren.

Boekbespreking / Politiek van de Wiskunde

[Jan de Graaf]



Auteur: Karen François
Uitgever: VUBPRESS – ASP – Brussel (2008)
ISBN 978 90 5487 479 9
Prijs: € 29,95 (510 pagina's)

Bij 'Politiek van de Wiskunde' dacht ik in eerste instantie aan politieke beslissingen en beslissingsbevoegdheden:

- inzake omvang en zuiverheid van wiskundepakketten in het voortgezet onderwijs; met name aan de rookgordijnen veroorzaakt door opgedrongen quasi-toepassingen;
- inzake het verlenen van wiskunde-onderwijsbevoegdheden aan 'anders opgeleiden', die het zelf ook allemaal niet zo goed begrepen hebben.

Dit zijn *niet* de kwesties waar het in dit dikke boek/proefschrift over gaat. Waar over dan wel? Er is in dit omvangrijke werk een viertal beschouwingstrajecten te onderscheiden:

a. philosophie en sociale antropologie van de wiskunde;
b. geschiedenis en methodologie van de wiskunde;
c. iconen in de wiskunde: Euclides, Descartes, Riemann, …
d. het Vlaams secondair onderwijs en derzelven eindtermen.

Ad a – Hoofdstukken I en V: Latour, Husserl, Witgenstein, Gödel. De sociaal antropoloog Latour wenst de illusie op te heffen dat 'Wetenschappen' en 'Politiek' twee, van elkaar afgesloten, domeinen zijn; Latour noemt dat 'Opheffen bicaméralisme' (sic!). Hij streeft daarnaar in het kader van zijn 'Politiek van de Natuur'. In het onderhavige boek lijkt dit gedachtengoed verbijzonderd te worden tot een 'Politiek van de Wiskunde'. Begrippen als 'niet-waardenvrij' en 'etnowiskunde' steken daarbij de kop op. Het lijkt daarbij soms alsof schrijfster denkt dat het bij wiskunde om 'de waarheid' gaat en dat deze 'waarheid' dan mede door sociologische factoren bepaald wordt. Voor de ouderen onder u: Marcuse komt niet voor in de literatuurlijst. Het doorgronden van deze hoofdstukken had bij ondergetekende geen al te grote prioriteit. Een en ander lijkt ook van minieme betekenis voor het voortgezet onderwijs.
Ad b – Hoofdstukken III en IV: Plato, Aristoteles, Descartes. Deze hoofdstukken bevatten, zeker ook voor een leraar, tal van leesbare stukken om met leerlingen over te praten. Ik noem hier slechts: Plato's vier kenniscategorieën (pag. 132), Perfecte getallen (pag. 137), Plato's Academie (pag. 153), Descartes' hoekdeelmachine (Mesolabum, pag. 190), Regendruppel en Regenboog (pag.197).
Ad c – Hoofdstuk II: Goldbach, Riemann, Collatz. Dit hoofdstuk gaat over de diepere 'aard' van wiskundige bewijzen. Ik vraag me af, ongetwijfeld heel naïef, waarom hij zijn simpele gedachte dat het in de wiskunde om een 'spel' met zeer stricte 'spelregels' gaat, en verder helemaal niks, zou moeten opgeven. Wiskunde 'werkt' op alle fronten in onze moderne maatschappij. Niet iedereen ziet dat, of wil dat zien, maar dat hoeft ook niet.
Ad d – Hoofdstuk VI. Het lijkt mij een paradijs voor onderwijskundigen. Echt smullen geblazen: veel tabellen en visie op en over eindtermen, etc. Internationale vergelijkingen van scores. Nederlanders beseffen wel degelijk dat Vlaanderen het uitstekend doet! Wat dit overigens allemaal te maken heeft met de voorafgaande diepzinnigheden, is niet duidelijk.

Formules komen in dit omvangrijke werk zeer weinig voor. Wel wordt een handvol, met formules omgeven, historisch belangrijke, wiskundige problemen besproken waar een leraar, ten behoeve van leergierige leerlingen, zijn voordeel mee kan doen: 'Proof by looking' (pag. 83), het Goldbach vermoeden (pag. 64), Priemgetallen en de Riemann ζ-functie (pag. 75), het ($3n + 1$)-vermoeden (pag. 80), …
Tot slot zij gewezen op de vele, welhaast spirituele, beschouwingen die wiskunde-lessen voor intelligente tieners spannend kunnen maken. Zoals: '(…) uiteindelijk kan men het bestaan van mathematische objecten niet bewijzen, net zomin als het bestaan van god…' (pag. 89).

Over de recensent
Jan de Graaf is gepensioneerd hoogleraar Toegepaste Analyse aan de Technische Universiteit Eindhoven. Hij verzorgde veel service-onderwijs wiskunde, met name aan studenten elektrotechniek en natuurkunde.
E-mailadres: *J.d.Graaf@tue.nl*



Jaarvergadering /

Tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2009 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op
aterdag 7 november 2009
Aanvang: 10:00 uur
Sluiting: 16:00 uur
Plaats: Anna Van Rijn College (locatie Albatros),
Albatros 1,
3435 XA Nieuwegein

Agenda huishoudelijk gedeelte

1. Opening door de voorzitter, mevr.drs. M. Kollenveld.
2. Jaarrede van de voorzitter.
3. Notulen van de jaarvergadering 2008 (zie het volgende nummer van Euclides).
4. Jaarverslagen (zie het volgende nummer van Euclides).
5. Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie.
6. Bestuursverkiezing. De bestuursleden M. Kamminga en M. Kollenveld zijn aftredend en stellen zich herkiesbaar. Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen personen schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
7. Rondvraag. Leden die een vraag in de rondvraag willen stellen, wordt verzocht deze vóór de vergadering in te dienen bij de secretaris (*secretaris@nvvw.nl*).
8. Sluiting van de jaarvergadering.

Studiedag – Wiskunde, daar kun je op rekenen!

Doorlopende leerlijnen en aansluitingsproblematiek zijn meer dan ooit, mede door de aanhoudende politieke aandacht voor met name wiskundeonderwijsland, een *hot item*. Dat een en ander niet echt soepel gaat bij allerlei overgangen, wisten we al, maar hoe goed weten we wat er aan beide zijden van de scheidslijnen aan onderwijs wordt gegeven en genoten?
En wat weten we van de keuzes die zijn gemaakt voor programma's, onder andere onder druk van de beperkte hoeveelheid onderwijstijd?
Een paar voorbeelden:

- Weten we in het voortgezet onderwijs (vo) wel goed hoe er in het primair onderwijs (po) wordt gerekend? Denk bijvoorbeeld aan alle krantenkoppen waarin de staartdeling wordt genoemd als verloren goed uit een rijk verleden. Is dat echt zo? En wat wordt er dan nog wel aan delen gedaan in het po?
- De commissie Meijerink met zijn referentieniveaus; er wordt veel geld uitgetrokken om het rekenen weer op peil te krijgen. Op individuele scholen wordt er aan gewerkt, Cito maakt toetsen, het APS en het FI verzorgen cursussen, de NVvW heeft twee rekenprojecten (voor vmbo en havo C&M) en ook cTWO spreekt een woordje mee. Maar wat is eigenlijk functioneel rekenen en op welke manier besteed je daar aandacht aan; in de wiskundeles of daarnaast? En moet het ook functioneel zijn bij andere vakken? En hoe toets je het?
- Wat weet een bovenbouwdocent nog over wat wel en wat niet wordt behandeld in de onderbouw? Parallel daarmee: wat weten vmbo- en mbo-docenten van elkaars manier van rekenen/wiskunde onderwijzen?
- En natuurlijk ook: hoe zit het met de algebraïsche vaardigheden in de overgang vo-ho? Hoe zijn de eerste examens van de 2007-programma's gevallen (of voelde het veld zich overvallen?) en wat mag er worden verwacht van de 2010-examens vwo? Hoe staat het met de vo-ho-dialoog over de aansluitingsproblematiek?

Allerlei (vervolg)opleidingen vinden dat je op wiskunde moet kunnen rekenen. En ook het rekenen moet op orde zijn. Kunnen wij dat blind garanderen of is het goed om daar wat verder over door te praten met elkaar?
Wij hebben een aantal personen uitgenodigd voor presentaties en een aantal docenten heeft gehoor gegeven aan onze oproep om actief bij te dragen aan het thema.
Het programma is min of meer onderverdeeld in po-vo (deel A), vmbo-mbo (deel B), onderbouw-bovenbouw havo/vwo (deel C), vo-ho (deel D) en diversen (deel E).
Wij denken dat iedere docent voldoende keuzeopties heeft om met dit programma aan zijn/haar trekken te komen.
De organisatoren van de studiedag zijn:

Studiedag 2009

[Marianne Lambriex]

Lidy Wesker (lerarenopleiding ILO van de UvA), Kenneth Tjon Soei Sjoe (lerarenopleiding wiskunde HvA-OO), Henk van der Kooij (bestuur NVvW).

Kosten

De studiedag is gratis voor leden.
Leden: maak eens reclame voor de vereniging en breng een collega-niet-lid mee!
Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 60,00 (deze kosten kan de school betalen uit de nascholingsgelden!). Hiermee zijn zij, als ze daarvoor belangstelling hebben, tevens gratis lid van de vereniging tot 1 augustus 2010, inclusief alle faciliteiten, waaronder de zeven nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, gratis toegang tot de regionale studiebijeenkomsten en examenbesprekingen in het voorjaar en mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen.
Ook studenten zijn welkom; zij betalen € 30,00. Wie een lunch bestelt, betaalt daarvoor € 10,00.

Aanmelding

Aanmelding dient te geschieden **vóór 17 oktober 2009**.
Dit jaar gaat de aanmelding weer geheel digitaal via de site van de vereniging, *www.nvvw.nl*. Daarop staat de laatste en soms meer uitgebreide informatie over de workshops. Het aanmeldingsformulier leidt u door de vragen. Leden die een lunch willen gebruiken, maken het voor hen geldende bedrag over op giro 143917 ten name van Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Dronten. Betaalt u via een gezamenlijke of schoolrekening of elektronisch, vermeld dan ook de volledige deelnemersnaam, adres en woonplaats.
Het voor u geldende bedrag kunt u aflezen uit de volgende tabel.

	zonder lunch	met lunch
Lid	gratis	€ 10,00
Niet-lid	€ 60,00	€ 70,00
Student (niet-lid)	€ 30,00	€ 40,00

De plaatsing in werkgroepen geschiedt in volgorde van binnenkomst van aanmelding. Deze wordt uiterlijk één week voor de studiedag bevestigd via e-mail. Aan het begin van de studiedag ontvangt u een badge met uw plaatsingsgegevens.
Ter plaatse aanmelden is mogelijk, echter niet wenselijk omdat bij onvoldoende voorinschrijving van een werkgroep deze niet zal doorgaan. De werkgroepleiders stellen hun tijd en inzet gratis ter beschikking en het is dan teleurstellend om voor twee personen een lange trip te moeten maken. Voor de organisatie is het van belang dat u zich op tijd aanmeldt. Wilt u toch op de dag zelf aanmelden dan betaalt u € 20,00 extra en is het kunnen bijwonen van een werkgroepen afhankelijk van de beschikbare ruimte.

Certificaat

De NVvW heeft de mogelijkheid om nascholingscertificaten uit te reiken. Wilt u een certificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding ook uw voorletters en uw geboortedatum.
U kunt uw certificaat na afloop van de studiedag (vanaf 15:45u) in ontvangst nemen, op vertoon van een geldig identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele studiedag heeft meegemaakt. Certificaten worden niet nagestuurd.

Informatie

Contactpersoon voor de jaarvergadering/studiedag is Marianne Lambriex, tel. 0497-517781 (na 18:00u), e-mail: *m.lambriex@nvvw.nl*; bij onbereikbaarheid én noodgeval Kees Lagerwaard, tel. 026-3813646, e-mail: *secretaris@nvvw.nl*.

Programma Studiedag

10:50-11:00u	Inleiding op de studiedag
11:00-11:45u	Plenaire lezing
11:45-12:00u	Koffie
12:00-13:00u	Werkgroepen, ronde I
13:00-14:00u	Lunch en markt
14:00-15:00u	Werkgroepen, ronde II
15:00-15:20u	Koffie
15:20-16:00u	Plenair: de SIGMA-prijsuitreiking
16:00-16:10u	Afsluiting

Plenaire bijeenkomsten

's Morgens – Het is de laatste tijd een traditie dat één van de plenaire lezingen een verrassing is. Ditmaal wordt de plenaire lezing die hoort bij het thema verzorgd door een *mystery guest*.
's Middags – SIGMA-prijs 2009 voor betere wiskundeaansluiting in het onderwijs.
SIGMA is een *special interest* groep die in 2007 door SURFfoundation (initiator van innovatie in het hoger onderwijs en onderzoek) in het leven werd geroepen om een landelijke community te organiseren op het gebied van wiskundeaansluiting.
De SIGMA-prijs is voor het eerst in 2008 uitgereikt, op het LowLands festival.
In 2009 is de jury van de SIGMA-prijs weer op zoek naar succesvolle projecten en samenwerkingsverbanden vo-ho die aantoonbaar hebben bijgedragen aan een verbeterde vo-ho-wiskundeaansluiting en/of aan een vergrote doorstroom naar vervolgopleidingen. De SIGMA-prijs is een materiële prijs van € 5.000,00 te besteden aan een studiereis.
De winnaar wordt door een deskundige jury gekozen uit de inzendingen. De deadline voor inzendingen is 30 september 2009.
De SIGMA-prijs 2009 wordt, na bekendmaking van de nominaties, uitgereikt op de studiedag van NVvW tijdens de laatste plenaire bijeenkomst.
Informatie over de SIGMA-prijs, het aanmeldingsformulier en de criteria voor de prijs zijn te vinden op: *www.surfgroepen.nl/sites/SIGMA/SIGMAprijs/SIGMAprijs2009*

Werkgroepen

PO-VO

In **deel A** staan inhouden (het wat) en didactische benaderingen (het hoe) in het primair onderwijs (po) centraal. Voor een deel met feitelijke informatie over wat er hoe geleerd wordt en voor een ander deel met discussiemogelijkheden over hoe een goede doorlopende leerlijn richting voortgezet onderwijs (vo) gestalte kan worden gegeven.

A1. Hoe rekenen ze tegenwoordig op de basisschool?
Else Simons, Peter Hoogendijk (beiden Malmberg)
U realiseert zich dat leerlingen binnenkomen met een bepaalde rekenbagage vanuit het basisonderwijs. Veel docenten weten echter niet wat kinderen tegenwoordig echt leren op de basisschool en al helemaal niet op welke manier. Dat geldt voor docenten wiskunde, maar nog veel sterker voor docenten van vakken als aardrijkskunde en biologie. In deze werkgroep krijgt u een beeld van wat kinderen op de basisschool leren en de didactiek daarbij. Bovendien laten we zien hoe rekenonderwerpen aan de orde komen bij allerlei vakken in het voortgezet onderwijs. Als wiskundedocent krijgt u zo meer kennis van wat er ‘voor’ en ‘naast’ wiskunde aan rekenen wordt gedaan.

A2. Rekenen – de staartdeling is nooit weggeweest
Lonneke Boels (Christelijk Lyceum, Delft)
‘Kinderen kunnen niet meer delen. Dat komt omdat ze de staartdeling niet meer leren. Tegenwoordig leren ze namelijk de ‘hapmethode’. Met enige regelmaat lees ik iets dergelijks in de krant. In mijn bijdrage laat ik zien dat kinderen de staartdeling nog steeds leren – alleen de manier van noteren is anders. Ook de voorbereidende stappen in het leerproces verschillen. Via voorbeelden uit diverse methoden laat ik u kennis maken met het leerproces. Daarna gaat u zelf met de ‘hapmethode’ aan de slag. Hierdoor begrijpt u uw eigen leerlingen beter. Bovendien leert u verschillende manieren om van de nieuwe notatie over te gaan op de ‘ouderwetse’ staartdeling.

A3. Procenten in het po als inspiratie voor het vo
Ronald Keijzer (Hogeschool IPABO, FIsme), Arie Fase (Hogeschool IPABO)
Procenten komen we dagelijks tegen. Dat maakt het niet moeilijk om een startpunt voor het onderwijs rond procenten te vinden. Vrijwel ieder kind in groep 7 van de basisschool weet dat ‘100 procent’ alles is en dat 1 procent korting wel erg karig is. Tijdens de workshop kijken we naar beelden van enkele lessen rond procenten in groep 7. We zien hoe intuïtieve noties van leerlingen aangegrepen worden om te leren rekenen met procenten. Vervolgens gaan we na wat de waarde van de getoonde werkwijze kan zijn voor het ondersteunen van leerlingen bij het leren rekenen met procenten of het ophalen van deze kennis in het voortgezet onderwijs.

A4. Doorlopende leerlijn breuken po-vo
Geeke Bruin-Muurling (Eindhoven School of Education)
In deze workshop besteden we aandacht aan de doorlopende leerlijn voor breuken. Gezamenlijk gaan de deelnemers op zoek naar knelpunten binnen dit domein in de overgang van po naar vo. Uitgangspunt zijn de curricula van zowel po en vo. We zullen proberen de bevindingen te koppelen aan de ervaringen van de deelnemers uit de praktijk. We besluiten de workshop met het formuleren van mogelijke oplossingen voor de problemen die we tegen zijn gekomen.

A5. Wat vertellen de Cito-toetsen?
Judith Vos (Cito)
Veel leerlingen krijgen een advies voor het vo op basis van de eindtoets van het Cito. Wat zegt de uitslag van de eindtoets over het niveau van de leerling? In deze workshop zetten we de verschillende categorieën van opgaven, met voorbeelden, op een rijtje. Ook ontwikkelt het Cito materiaal om de leerlingen in hun hele basisschoolperiode te kunnen volgen en het rekenen van de leerlingen te diagnosticeren. In het tweede deel van de workshop bekijken we welke strategieën leerlingen gebruiken bij het oplossen van opgaven uit de toetsen van het Cito. Wat zijn veel voorkomende strategieën in de bovenbouw van het basisonderwijs en wat zegt dit over het verworven inzicht? We discussiëren over de consequenties die dit heeft voor het onderwijsaanbod in het vo.

A6. Zijn breuken en verhoudingen nou wel of niet hetzelfde?
Hessel Pot, Woerden
Soms betekent Verhouding hetzelfde als Positief Getal; soms ook niet. Hoe zit dat? Soms betekent Verhouding hetzelfde als Quotiënt, of als Breuk; soms ook niet. Hoe ligt dat? Alle rekenkundeboeken zeggen dat je het alleen kunt hebben over verhoudingen van gelijksoortige grootheden, maar in de praktijk gaat het juist meestal om verhoudingen van ongelijksoortige grootheden (afstand-tijd-verhouding). Hoe kan dat? In geen enkel schoolboek of theorieboek zie ik deze vragen beantwoord. Om hier uit te komen lijkt het me nodig te erkennen dat de vlag ‘Verhouding’ verschillende ladingen dekt: éénsoort-verhoudingen naast tweesoort-verhoudingen, en norm-verhoudingen naast nietnorm-verhoudingen.

A7. Stroomlijning en visualisering leerlijnen rekenen/wiskunde 4-14
Monica Wijers (FIsme)
Het project Rekenlijn dat uitgevoerd wordt door Fi en SLO, wil komen tot een voor leraren po (incl. so) en vo heldere, visuele beschrijving van een leerlijn voor het leren rekenen. Zowel in de praktijk van het onderwijs als op het beleidsniveau blijkt hieraan grote behoefte te bestaan. De digitale Rekenlijn waaraan in dit project wordt gewerkt, maakt zichtbaar waarmee de leerlingen in de leeftijd van 4 tot 14 bij het rekenen bezig zijn. Rekenlijn licht cruciale leermomenten die zich daarbij voordoen, toe en geeft informatie over de onderwijsactiviteiten die deze leermomenten ondersteunen. De nadruk zal liggen op de overgang van po naar vo. In deze werkgroep maakt u kennis met een eerste versie van een deel van Rekenlijn en bespreken we voorlopige resultaten uit een pilot-ronde. U wordt uitgenodigd te reageren en mee te denken over vorm en inhoud.

VMBO-MBO

In **deel B** zijn specifieke problemen die in de 'beroepskolom' (vmbo-mbo-hbo) spelen, ondergebracht. Natuurlijk zijn er ook in deel A en deel C workshops die de eigen problematiek van het vmbo omvatten.

B1. Rekenvaardigheid in het vmbo

Kees Buijs (SLO)

Zoals in enkele recente rapporten aan het licht is gekomen, laat de rekenvaardigheid van leerlingen in het vmbo, met name binnen de basisberoepsgerichte leerweg, nogal te wensen over. Dit is des te meer een probleem omdat er in de reguliere wiskundemethoden voor rekenvaardigheid maar weinig aandacht is. SLO is daarom in 2008 een project 'Verder met Rekenen' gestart dat gericht is op de ontwikkeling van een onderwijsleertraject 'Voortgezet Rekenen' bestemd voor klas 1/2 van het vmbo. Een eerste pilot op vier vmbo-scholen heeft afgelopen schooljaar plaatsgevonden. Samen met de Universiteit Leiden zijn de resultaten van deze pilot geanalyseerd. In deze werkgroep wordt een schets van opzet en inhoud van het leertraject gegeven, met daarbij een overzicht van de resultaten.

B2. RekenVOort vmbo

Wim Kuipers (NVvW-contactpersoon)

In twee sectoren van het vmbo (Zorg & Welzijn en Economie) is er geen verplichting om het vak wiskunde te volgen in de leerjaren 3 en 4. Om deze groep leerlingen een steun in de rug te geven voor o.a. een goede doorstroom naar het mbo worden in het project RekenVOort vmbo rekenmodules ontwikkeld. Dit project is mogelijk gemaakt door een substantiële subsidie van het ministerie van OCW aan de NVvW en FIsme.

Functioneel rekenen met een binding met de beroepsgerichte sectorvakken staat daarbij voorop. In deze workshop de eerste praktijkervaringen.

De pilotscholen zijn: Calvijn met Junior (Amsterdam), CC De Populier (Den Haag), Da Vinci College (Roosendaal), Trias VMBO (Zaanstreek), Tabor, locatie d'Ampte (Hoorn) en Tabor, locatie Oscar Romero (Hoorn).

B3. Vmbo-mbo: over de brug met rekenen

Rinske Stelwagen (CINOP)

Vanaf augustus 2010 wordt een nieuwe wet van kracht waarin wordt vastgelegd wat leerlingen moeten kunnen op het gebied van taal en rekenen in verschillende stadia van hun schoolloopbaan. Dit alles gebeurt om de doorlopende leerlijnen te borgen. Voor (heel) het vmbo geldt dat alle leerlingen (dus ook degenen zonder wiskunde in hun pakket) het referentieniveau 2F moeten halen. Op het mbo bouwt men verder aan rekenvaardigheden, met dit niveau als uitgangspunt. Momenteel haalt een groot deel van de vmbo-leerlingen dit niveau niet. Deze workshop geeft antwoord op de vragen: Wat zijn de referentieniveaus precies? Wat betekent dat voor het vmbo? Wat verwacht het mbo van de instromende leerlingen?

Onderbouw-bovenbouw havo/vwo

In **deel C** zijn presentaties gegroepeerd die de overgang onderbouw-bovenbouw betreffen, maar ook onderwerpen die met name voor de onderbouw of voor het hele vo van belang zijn.

C1. De breuk tussen basisschool en voortgezet onderwijs

Truus Dekker, Martin Kindt (beiden FIsme)

- Leren leerlingen die naar havo en vwo gaan wel goed genoeg rekenen met breuken op de basisschool?
- Houden leraren in het voortgezet onderwijs wel voldoende rekening met de actuele voorkennis van de kersverse brugklasser?
- Beseffen auteurs van schoolboeken wel dat de algoritmen voor het rekenen met breuken voor het eerst echt functioneren in de algebra?
- Hoe kunnen we de leerlijn breuken als een gladde kromme laten doorlopen?

Over dit type vragen willen we graag discussiëren in onze werkgroep. Hierbij zullen we gebruikmaken van een serie oefenvoorbeelden.

C2. Reken maar!

Lea Pöttgens, Michelle van Nisselroy (beiden Raayland College)

Wat te denken van: '32 = 6' en '2*a* is twee keer *a*, dus $2\frac{1}{3}$ is twee keer $\frac{1}{3}$'? Veel leerlingen hebben problemen met rekenen. Hoe pak je dat als school aan? Hoe verzorg je de uitleg van delen door een breuk? Hoe zit het met staartdelingen? Hoe zorg je ervoor dat leerlingen inzicht verwerven en vaardig zijn?

Op het Raayland College is een traject ingezet met als doel onderhoud van rekenvaardigheid in havo 1-5, vwo 1-2, vmbo 1-2. Rekenen maakt deel uit van het wiskundeprogramma. In de bovenbouw maakt het deel uit van het schoolexamen.

C3. Differentiatie bij wiskunde in 3-havo

Esther Harbers (Udens College), Pieter van der Zwaart (SLO)

Wie les geeft in 3-havo kent de problematiek. Hoe houdt je de zwakkere leerlingen bij de les en daarmee de keuze voor wiskunde A open? Hoe geef je de leerlingen die wiskunde B kiezen voldoende bagage mee om kansrijk wiskunde in de Tweede fase te volgen? SLO en enkele scholen werkten het afgelopen jaar een aantal alternatieven uit rond deze problematiek. Zo is op het Udens college in het afgelopen schooljaar gewerkt met twee verschillende programma's voor wiskunde in 3-havo en zijn de leerlingen in de laatste twee perioden voor wiskunde heringedeeld. Wij willen met u praten over de programma's en het realiseren van alle randvoorwaarden binnen school.

C4. Rekenen op verschillende niveaus

Barbara van Amerom, Sonia Palha (beiden FIsme)

Rekenen komt terug in de wiskundeles, er moet meer geoefend worden met de basisvaardigheden. Maar op welke manier: aparte rekenlessen, rijtjes kale sommen, of juist in de reguliere lessen geïntegreerd? Wat het oefenen van rekenvaardigheden ook lastig maakt, is dat je als docent te maken hebt met grote niveauverschillen tussen leerlingen. Hoe ga je hiermee om?

In deze workshop gaan we bestaand lesmateriaal analyseren en aanpassen zodat binnen één les op verschillende niveaus geoefend kan worden.

C5. Referentietoetsen rekenen/wiskunde
Jan Janssen, Harm Boertien, Ger Limpens (allen Cito)
In 2008 publiceerde de werkgroep Rekenen & wiskunde het rapport 'Over de drempels met rekenen'. Hierin werd getracht heldere referentieniveaus voor rekenen en wiskunde te beschrijven voor leerlingen van 12, 16 en (omstreeks) 18 jaar. Cito ontving de opdracht bijpassende referentietoetsen te vervaardigen. Onlangs gerealiseerde proefafnames dienden twee doelen:

- toetsen met een diagnostisch karakter ontwikkelen om het vaardigheidsniveau van leerlingen vast te stellen;
- gegevens verzamelen om de diverse rekenvaardigheidniveaus in kaart te brengen.

Tijdens de workshop gaan we in op kenmerken van de doorlopende vaardigheidsschaal die daartoe ontwikkeld wordt. Ook zullen voorbeeldopgaven uit de toetsen getoond worden.

C6. Rekenen op afstand
Ton Lecluse en collega's (Comenius College)
Op het Comenius College (Hilversum) wordt momenteel Algecadabra ontwikkeld, een computerprogramma dat opgaven genereert en oplost; van brugklas tot examenklassen, (momenteel) voor wiskunde, natuurkunde en economie. De leerling krijgt telkens een opgave van een gekozen onderwerp en moet deze eerst zelf, op papier zonder rekenmachine, oplossen. Daarna kan de uitwerking worden opgevraagd. Het programma ondersteunt extra met hints en (grafische) hulpvensters. Het programma is geïntegreerd in de studiewijzers. Het kan worden gebruikt op een digitaal schoolbord, maar ook door leerlingen thuis.
In de workshop gaan we ermee aan de slag vanuit een studiewijzer.

C7. Denkactiviteiten
Theo van den Bogaart (cTWO-contactpersoon)
In de visie van de vernieuwingscommissie cTWO laat wiskunde en wiskundeonderwijs zich organiseren rondom concepten en denkactiviteiten. De kernconcepten lopen als een rode draad door de wiskunde, terwijl de denkactiviteiten deze concepten met elkaar en met de contexten verbinden.
In de examenprogramma's voor 2014 en in de experimenten die daarmee dit schooljaar zijn gestart, wordt geprobeerd meer gestructureerd en meer expliciet dan nu het geval is, met deze denkactiviteiten om te gaan, met als doel een balans te vinden tussen de verschillende activiteiten: modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren en logisch redeneren en bewijzen.
In deze workshop zal nader op deze denkactiviteiten worden ingegaan aan de hand van concrete voorbeelden.

VO-HO
In **deel D** komen specifieke aandachtspunten voor de bovenbouw havo/vwo en de aansluiting naar het hoger onderwijs (ho) aan bod.

D1. RekenVOort havo
Michiel Doorman (FIsme-contactpersoon)
Vanaf 2007 is wiskunde niet meer verplicht in het profiel C&M van de havo. Het ontbreken van rekenwiskundeonderwijs in havo-4 en -5 is voor leerlingen een drempel voor studiesucces aan de pabo en hbo-v.
In het project RekenVOort werkt de NVvW samen met FIsme aan deze problematiek. We ontwikkelen een rekenprogramma dat speciaal is toegesneden op deze doelgroep. Inmiddels zijn de eerste modules af en is in dit schooljaar (2009/2010) een aantal experimenten gestart. In deze werkgroep bespreken we materiaal, didactische uitgangspunten, organisatievormen op school en de eerste ervaringen.

D2. Rekenactiviteiten in de nieuwe 2014-wiskundeprogramma's
Hielke Peereboom (cTWO-contactpersoon)
In deze workshop staan enkele lesmodules centraal over rekenen en algebra. Deze modules zijn speciaal ontwikkeld voor wiskunde C in het kader van de examenexperimenten van de vernieuwingscommissie cTWO, maar ze zijn ook goed in het huidige lesprogramma te gebruiken. Naast aandacht voor de inhoud zal in deze workshop uitgebreid worden ingegaan op de visie achter de pakketjes, namelijk dat C&M-leerlingen behoefte hebben aan een eigen, zelfstandig wiskundevak waarin een duidelijk verband wordt gelegd tussen de interesses van de leerling en de wiskunde van bijvoorbeeld rekenen en algebra. Uiteraard zal er in de workshop ook worden ingegaan op de ervaringen die inmiddels op de experimenteerscholen zijn opgedaan.

D3. Algebraïsche vaardigheden nader onderzocht
Irene van Stiphout (Eindhoven School of Education)
Het doel van deze workshop is om meer inzicht te krijgen in hoe leerlingen omgaan met algebraïsche vaardigheden. We zullen daartoe met elkaar naar concrete uitwerkingen van leerlingen gaan kijken. Voorbeelden uit de eigen lespraktijk zijn van harte welkom!
Aan de hand van theorie uit de wiskundedidactiek zullen we de uitwerkingen van leerlingen gaan analyseren en bespreken. Zo zullen bijvoorbeeld een aantal misconcepten en verschillende strategieën van leerlingen aan de orde komen. We hopen op deze manier bij te dragen aan begrip voor moeilijkheden die leerlingen ervaren met algebra.

D4. Algebra en *symbol sense* in een digitale omgeving
Christian Bokhove (St. Michaël College, FIsme)
Als het gaat om algebra zijn zowel vaardigheden als inzicht, gevat in het gebrip 'symbol sense', beide van belang. Ik bespreek kort de achtergrond van algebraïsch inzicht, en toon hoe 6-vwo leerlingen in 1-op-1-sessies 'ongewone opgaven' maakten binnen een digitale omgeving. Een voorbeeld zo'n opgave is:
Los op de vergelijking:

$$(x^2-7x+12)\cdot(8x-11)=(x^2-7x-12)\cdot(3x+14)$$

'Ziet' de leerling dat links en rechts dezelfde uitdrukkingen voorkomen, of werkt de leerling meteen de haakjes uit? Er zal ook ruimte zijn voor een korte discussie over de wijze waarop we onze leerlingen zowel vaardigheden als inzicht kunnen bijbrengen.

D5. Een stap verder met instaptoetsen
Wim Caspers (TU Delft, Adelbert College), Bram Theune (Nehalennia)
Op een aantal universiteiten en hogescholen zijn weer instaptoetsen basisvaardigheden wiskunde afgenomen. Groot verschil met voorgaande jaren is dat ze dit keer zijn samengesteld door een toetsgroep bestaande uit vertegenwoordigers van het hoger en het voortgezet onderwijs. Dit alles in het kader van het SURF-project Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde 2 (NKBW2). Voorjaar 2009 zijn varianten van deze toetsen op middelbare scholen afgenomen. Zo wordt binnen NKBW2 geprobeerd om de kloof tussen instaptoetsen uit het ho en 'exittoetsen' van het vo te dichten door te zoeken naar een inhoud die voor docenten in het vo als acceptabel wordt gezien en door docenten in het ho als afdoende startpunt. Vanzelfsprekend besteden we aandacht aan de behaalde resultaten, maar ook aan de manier waarop de toetsen zijn samengesteld. Wat zou er nog verbeterd kunnen worden en past zo'n toets in het schoolexamen? Is het wenselijk dat dergelijke toetsvragen in één of andere vorm ook aan de orde komen bij het cse?

Diversen
In **deel E** staan een aantal wat algemenere onderwerpen die meer met de actualiteit te maken hebben, maar niet zozeer met doorgaande leerlijnen. Verstandig gebruik van ICT en doorgaande kwaliteitsverhoging van docentcompetenties komen aan bod.

E1. Inzicht en vaardigheden: Op de TI-Nspire kan iedereen rekenen
Gert Treurniet (Chr. Gymn. Sorghvliet, Texas Instruments)
Combineer het ontwikkelen van inzicht, het ontwikkelen van vaardigheden en het toetsen in de les. TI-Nspire is gemaakt voor toepassing tijdens alle delen van de didactiek. In deze workshop ervaart u zelf de kracht van de TI-Nspire: de docent concentreert zich op de ontwikkeling van inzicht, de leerling komt in beweging, ontwikkelt inzicht en toetst haar/zijn vaardigheden. Met of zonder digibord: op de TI-Nspire kan ook het vervolgonderwijs nog rekenen.

E2. Een Natural Display rekenmachine
Simon Biesheuvel (Willem de Zwijger College)
De nieuwe Casio fx-9860G II kan (standaard ingebouwd) berekeningen maken met exacte antwoorden, gonio-vergelijkingen oplossen met tien exacte antwoorden enz.
Voorbeelden (de invoer en uitvoer is van de GR overgenomen):
- $\frac{14}{3-\sqrt{2}}$; antwoord: $6+2\sqrt{2}$
- $x^2+7x+2=0$; antwoord: $x_1=\frac{-7+\sqrt{41}}{2}$ en $x_2=\frac{-7-\sqrt{41}}{2}$
- SolvN$\left(\sin(x)\cos(x)=\frac{1}{2}\sin(x-\pi)\right)$; antwoord: $\{-2\pi, -1\frac{1}{3}\pi, -\pi, -\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{2}{3}\pi, \pi, 1\frac{1}{3}\pi, 2\pi, 2\frac{2}{3}\pi\}$
- Eq: NormCD(6, 8, X, 10) = 0.02; antwoord: X = 0.9740253888 (sigma berekenen)

Wat kan er allemaal met dit model? Moet je nu als docent je vraagstelling aanpassen? Wat moet een leerling opschrijven bij bereken exact? Ik zit in de cTWO-werkgroep 'De GRM verstandig leren gebruiken'. Resultaten die daar uit gaan komen, zullen natuurlijk ook ter sprake komen.

E3. Open leermaterialenbank wiskunde: een prachtkans voor docenten
Willem-Jan van Elk, Nico Verbeij (Aloysius College, NVvW, VO-Raad)
Open leermateriaal is (digitaal) materiaal dat je vrij kunt gebruiken en aanpassen: papieren materiaal, maar ook applets, werkbladen, oefenmateriaal, verrijkingsmateriaal of lessen voor een digitaal schoolbord. Zoekt u materiaal bij de methode of wilt u een leerling iets anders bieden? De 'open leermaterialenbank wiskunde' maakt het materiaal gemakkelijk vindbaar. Dat bespaart tijd en voorkomt dat u 'het wiel opnieuw uitvindt'. In deze workshop ziet u hoe de leermaterialenbank werkt, wat er al aan materiaal en complete leerlijnen beschikbaar is, en hoe de kwaliteit wordt geborgd. We presenteren praktijkervaringen en vertellen hoe u zelfgemaakt materiaal kunt bijdragen. En we horen graag wat uw wensen zijn voor de verdere ontwikkeling van de bank.

E4. Beroepsregister voor wiskundeleraren
Marianne Lambriex (NVvW), Dédé de Haan (FIsme)
Diplomering aan het einde van de opleiding is tegenwoordig niet meer voldoende om een beroepsleven lang goed te kunnen functioneren. De vrijblijvendheid rond na- en bijscholing zal ook voor (wiskunde) docenten haar langste tijd hebben gehad. Met de invoering van de Wet Beroepen in het Onderwijs (Wet BIO) op 1 augustus 2006 worden op termijn formele eisen gesteld aan docenten. De NVvW is in 2008 gestart met een project voor beroepsstandaarden en een register in het wiskundeonderwijs, WiVa. Dit project is voortgezet met een pilot waardoor er nu 30 wiskundeleraren ingeschreven zijn in het Initieel Register. In deze workshop krijgt u een toelichting over wat u moet doen om ook *Registerleraar* te worden.

NVvW-dag: zaterdag 7 november 2009!!

RECREATIE

Puzzel 85-1

Zeldzame permutaties

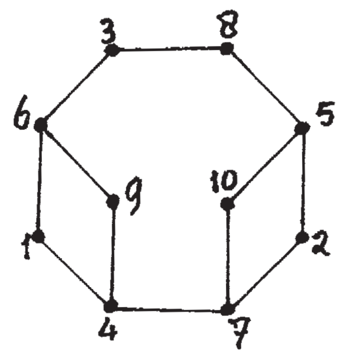
[Frits Göbel]

In de aflevering 'Drie formules gezocht' van Recreatie 81-7 kwamen we *robuuste* permutaties tegen. Deze zijn in het geheel niet zeldzaam: ze maken asymptotisch 100% van alle permutaties uit.
Ook het klassieke probleem van de enveloppen gaat in feite over permutaties, namelijk permutaties van 1, 2, …, n waarin geen enkel element k op de k-de plaats staat. Deze beslaan een fractie 1/e van alle mogelijkheden. De permutaties die wij nu gaan bekijken zijn heel wat exclusiever.

Gegeven: een geheel getal n en twee gehele getallen a en b, met $1 < a < b$ en $\text{ggd}(a, b) = 1$.
Gevraagd: een permutatie van 1, 2, ..., n zó dat de absolute verschillen tussen twee opvolgende termen steeds a of b zijn.

Zo'n permutatie noemen we voor het gemak een (a, b)-permutatie.
Voorbeeld: $a = 2$, $b = 3$, $n = 6$. De permutatie 1, 4, 6, 3, 5, 2 en nog 11 andere zijn (2, 3)-permutaties voor $n = 6$.
In sommige gevallen is een (a, b)-permutatie snel aan te geven. Neem $m = a + b$ en beschouw de getallen a, $2a$, $3a$, …, m modulo m.
In plaats van de gebruikelijke representanten 0, 1, …, $(m – 1)$ nemen we hier 1, 2, …, m.
De ggd van a en b is 1, dus ook $\text{ggd}(a, m) = 1$.
Dus de getallen zijn verschillend en vormen een permutatie van 1, 2, …, m. Bovendien geldt modulo m dat $+a$ hetzelfde is als $–b$, dus de absolute verschillen tussen opvolgende termen zijn inderdaad steeds a of b.
Voorbeeld: $a = 3$, $b = 5$, $n = 8$. We zien de (3, 5)-permutatie 3, 6, 1, 4, 7, 2, 5, 8 verschijnen.
Je kunt dit ook vinden door er steeds 3 bij te tellen maar er 5 af te trekken als de 8 wordt overschreden.

Bij het oplossen van de opgaven is het heel handig om van grafen gebruik te maken. De punten van zo'n graaf zijn de getallen 1, 2, ..., n. Twee punten zijn buren als het absolute verschil tussen de getallen gelijk is aan a of b. De graaf voor $a = 3$, $b = 5$, $n = 10$ ziet u ***in figuur 1***.
Een permutatie die aan de eis voldoet, correspondeert met een Hamilton-pad in de graaf. Zo'n pad is hier gemakkelijk te vinden, en daarmee een (3, 5)-permutatie voor $n = 10$.
De graaf voor $n = 11$ heeft geen Hamilton-pad en dat is snel te zien met behulp van de puntsnede {4, 6, 8}.
Er is dus geen (3, 5)-permutatie voor $n = 11$.



figuur 1

Opgave 1
Laat zien dat er geen (2, 7)-permutatie voor $n = 11$ bestaat.

Opgave 2
Bepaal een (3, 4)-permutatie voor $n = 16$.

Opgave 3
Onderzoek het bestaan van (2, 11)-permutaties voor $n = 14, 15, …, 20$.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. Bovendien zijn er twee boekenbonnen van 20 en 15 euro voor de beste oplossingen.
De deadline is 27 oktober.
Veel plezier!

Oplossing 84-7

Faculteiten!

Er waren 24 inzendingen. De enige nieuwe inzender, Antoon Verheye, heten we van harte welkom!
De twee opgaven zijn over het algemeen goed gemaakt. Ik heb voor de grap de gemiddelde score eens uitgerekend: 18,3. Niet slecht voor een resultaat in een periode waarin allerlei andere, belangrijkere dingen aan de orde zijn.

Opgave 1 is door iedereen goed opgelost. Er zijn vijf maximale tripels:
(17, 3, 18), (15, 4, 18), (14, 6, 18), (13, 7, 18) en (11, 9, 18)

Opgave 2 werd door twee inzenders niet begrepen zoals ze zelf meldden; enkele anderen lieten wat steekjes vallen. Maar de meesten hadden er geen moeite mee.
De oplossing bestaat uit acht tripels:
(7, 6, 10), (15, 15, 28), (29, 28, 54), (43, 42, 82), (47, 45, 88), (67, 66, 130), (79, 77, 152) en (92, 91, 180)
Jos Remijn gebruikte de *Big Number Calculator*, maar ook deze opgave kan heel goed met de hand worden opgelost.
De methode had ik al bij de opgaven aangegeven, tot teleurstelling van Lieke de Rooij die het liever zelf had verzonnen. Maar er viel nog wel iets zelf te ontdekken. Bijvoorbeeld, als $n + 1$ een priemgetal is, hoef je helemaal niets uit te rekenen, want dan kan $(2n)!$ niet deelbaar zijn door $((n + 1)!)^2$. Sterker nog, als $n + 1$ deelbaar is door een priemgetal p met $p^2 > n$, geldt hetzelfde. Pas als deze tests geen uitsluitsel geven, moeten kleinere delers van $n + 1$ worden onderzocht, en daarna eventueel de delers van $n + 2$, enz.
Jan Verbakel ging door tot $2n = 990$, Jozef Hanenberg met de computer zelfs tot $2n = 1.000.000$, en vond 57654 maximale tripels. Hans Klein ging nog verder: tot $2n = 100$miljoen. Deze doorbijters merkten op dat de maximale tripels niet zeldzamer lijken te worden, wat ik wel verrassend vind. Herm Jan Brascamp en Ton Kool meldden dat de waarden van n uit onze tripels ook te vinden zijn in de *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* onder A002503.

Ladderstand
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
G. Riphagen 554
H. Klein 452
L. v.d. Raadt 444
W. Doyer 415
T. Kool 326
J. Hanenberg 317
N. Wensink 303
H. Linders 266
W. v.d. Camp 237
H. Bakker 238
K. v.d. Straaten 222
K. Verhoeven 217
M. Woldinga 214

SERVICEPAGINA

Voor overige internet-adressen zie
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
www.wiskundeonderwijs.nl

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren

Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW

Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
2	27 oktober 2009	1 sep 2009
3	22 december 2009	27 okt 2009
4	9 februari 2010	8 dec 2009
5	30 maart 2010	2 feb 2010
6	18 mei 2010	23 mrt 2010
7	6 juli 2010	11 mei 2010

vrijdag 25 september, Utrecht
Studiemiddag in dialoog:
Goed rekenonderwijs
Organisatie NVORWO

vr. 25 en za. 26 september, Nijmegen
Nascholing wiskunde D: Op de schouders van reuzen
Organisatie Radboud Universiteit

za. 3 en zo. 4 oktober, Nemo, Amsterdam
Scientific Festival
Organisatie Nationaal Centrum voor Wetenschap en Technologie, e.a.

donderdag 8 oktober, Amsterdam
E-klas training wiskunde D
Organisatie ITS Academy en Amstel Instituut (UvA)
Zie pag. 41 in dit nummer.

zaterdag 10 oktober, Gent (B)
35 jaar VVWL
Organisatie VVWL

14 en 28 okt, 11 nov (woensdagen), Utrecht
Cursus Analytische Meetkunde voor wiskunde D
Organisatie FIsme

5, 12 en 19 nov (donderdagen), Utrecht
Cursus K&S voor wiskunde D
Organisatie FIsme

zaterdag 7 november, Nieuwegein
Jaarvergadering/Studiedag: Wiskunde, daar kun je op rekenen!
Organisatie NVvW
Zie ook pag. 44 e.v. in dit nummer.

maandag 9 november, Ede
Conferentie: 10 jaar VMBO!
Organisatie Sardes, Actis Advies, Uitgeverij SWP

zaterdag 14 november, Utrecht
Ars et Mathesis-dag
Organisatie Stichting Ars et Mathesis i.s.m. Universiteit Utrecht



TI-nspire™ TECHNOLOGIE
Een nieuwe visie vanuit meerdere wiskundige invalshoeken
Elke leerling leert op een andere manier.
De een begrijpt vergelijkingen vlot, de ander grafieken. De nieuwe TI-Nspire™ technologie voor Wiskunde en Exact is geschikt voor verschillende individuele manieren van leren. Lesmateriaal wordt gepresenteerd en onderzocht naar de voorkeur van de individuele leerling. Leerlingen kunnen daardoor wiskundige relaties en verbanden veel gemakkelijker waarnemen.
Als rekenmachine en als software voor de computer beschikbaar.
TI-Nspire™ TECHNOLOGIE
Voor een beter begrip van de wiskunde.
www.education.ti.com/nederland
1 ALGEBRA
2 GRAFIEKEN/ MEETKUNDE
3 LIJSTEN/ SPREADSHEETS
4 TEKSTVERWERKEN
VIERDYNAMISCH GEKOPPELDE OMGEVINGEN, TE BEWAREN IN ÉÉN DOCUMENT
Nu tijdelijk TI-Nspire™ bundel (handheld +software + TI-84 toetsenbord) voor slechts € 99,– ! *
tel 020 - 58 29 490
* exclusief € 9 verzendkosten
Texas Instruments
Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.


NETWERK
wiskunde die werkt!
NU OOK MET ENGLISH EDITION VOOR VWO